



# Nichtlineare modellprädiktive Regelung für die Bahnplanung eines Wiedereintrittsproblems

von

Carina Schomakers

## Masterarbeit

Vorgelegt im

Fachbereich 3 (Mathematik und Informatik)

der Universität Bremen

im Juni 2014

1. Gutachter: Prof. Dr. Christof Büskens  
2. Gutachter: Dr. Matthias Knauer  
Betreuer am Institut: David Seelbinder



---

## Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit ist, die Anwendbarkeit von modellprädiktiver Regelung auf ein Wiedereintrittsproblem zu überprüfen. Zur dynamischen Berechnung optimaler Flugbahnen wird ein physikalisches Modell, welches sich an der Vorgehensweise der Mission *Mars Science Laboratory* orientiert, genutzt. Dieses Modell beinhaltet Beschränkungen, die während der Wiedereintrittsphase eingehalten werden müssen und bei der Optimierung berücksichtigt werden. Das bei Anwendung der modellprädiktiven Regelung auftretende optimale Steuerproblem wird anhand eines direkten Verfahrens gelöst. Es wird zunächst diskretisiert und auf ein nichtlineares Optimierungsproblem zurückgeführt. Anschließend wird die numerische Lösung des Optimierungsproblems anhand des SQP-Verfahrens bestimmt.

Durch systematische Untersuchungen der numerischen Simulationen wird der Einfluss verschiedener Parameter, wie der Länge des Zeithorizonts und Gewichtungsfaktoren im Zielfunktional, festgestellt. Bei geeigneter Wahl dieser Parameter können im ungestörten Fall Trajektorien berechnet werden, die die geforderten Bedingungen erfüllen. Der dazu notwendige Zeithorizont kann durch das Einbeziehen einer Referenztrajektorie um 87,5 % reduziert werden. Des Weiteren werden die Resultate der modellprädiktiven Regelung hinsichtlich verschiedener Störungen analysiert. Während eine dünnere Atmosphäre oder höhere Eintrittsgeschwindigkeiten zu Problemen bei der rechtzeitigen Reduzierung der Geschwindigkeit führen, können geringere Eintrittshöhen durch alternative Flugbahnen gut kompensiert werden.

## Abstract

The aim of this thesis is to verify the adaptability of model predictive control on a reentry problem. For dynamic computation of optimal trajectories a physical model, which is based on the procedure of the Mission *Mars Science Laboratory*, is used. This model includes constraints, that must be satisfied during the reentry phase and are taken into account in the optimization. The optimal control problem, that emerges when the model predictive control is applied, is solved by means of a direct method. At first, it is discretized and reduced to a non-linear optimization problem. Afterwards, the numerical solution of the optimization problem is determined by means of the SQP method.

Based on systematic studies of the numerical simulations the influence of some parameters, such as the length of the time horizon and weighting parameters in the objective function, is determined. It is shown that in the unperturbed case trajectories, that satisfy the required conditions, can be computed for some range of those parameters. By the use of a reference trajectory the necessary time horizon can be reduced by 87,5 %. Furthermore, the results of model predictive control with respect to various disturbances is analyzed. While a thinner atmosphere or higher entry velocities lead to problems in the decrease of the velocity, lower entry altitudes can be compensated by alternative trajectories.





# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>viii</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Erforschung des Mars . . . . .	1
1.2 Ziele und Gliederung der Arbeit . . . . .	2
<b>2 Eintritt in die Marsatmosphäre</b>	<b>4</b>
2.1 Mission Mars Science Laboratory . . . . .	5
2.2 Modellbildung des Wiedereintrittsproblems . . . . .	9
2.2.1 Charakteristische Eigenschaften des Mars und seiner Atmosphäre . . . . .	12
2.2.2 Eigenschaften des Raumfahrzeugs . . . . .	14
2.2.3 Flugdynamische Gleichungen . . . . .	18
<b>3 Optimierung und optimale Steuerung</b>	<b>21</b>
3.1 Numerische Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme . . . . .	21
3.1.1 Grundlagen der nichtlinearen Optimierung . . . . .	21
3.1.2 Das SQP-Verfahren . . . . .	24
3.2 Optimale Steuerung . . . . .	25
3.2.1 Formulierung optimaler Steuerprozesse . . . . .	25
3.2.2 Lösung durch direkte Verfahren . . . . .	29
<b>4 Nichtlineare modellprädiktive Regelung</b>	<b>33</b>
4.1 Optimale Regelung . . . . .	33
4.2 Idee des MPC-Verfahrens . . . . .	35
4.3 Mathematische Formulierung . . . . .	37
4.3.1 Unendlicher Zeithorizont . . . . .	39
4.3.2 Endlicher Zeithorizont . . . . .	40
4.3.3 Länge des Zeithorizonts . . . . .	42
<b>5 Optimierung der Wiedereintrittstrajektorie</b>	<b>44</b>
5.1 Betrachtung als optimaler Steuerprozess . . . . .	44
5.1.1 Problemformulierung . . . . .	44

5.1.2	Wahl des Zielfunktional	48
5.1.3	Numerische Bestimmung der Lösung	50
5.2	Betrachtung als MPC-Problem	52
5.2.1	Problemformulierung	53
5.2.2	Numerische Bestimmung der Lösung	56
5.2.3	Berücksichtigung von Störungen	58
<b>6</b>	<b>Numerische Ergebnisse</b>	<b>62</b>
6.1	Resultate des OCP	63
6.2	Resultate des MPC-Verfahrens mit Endkosten	68
6.2.1	Systematische Untersuchung der Parameter	69
6.2.2	Einfluss verschiedener Störgrößen	77
6.3	Ergebnisse mit Referenztrajektorie	87
6.3.1	Systematische Untersuchung der Parameter	87
6.3.2	Einfluss verschiedener Störgrößen	96
<b>7</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>110</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>115</b>
<b>A</b>	<b>Zusätzliche numerische Ergebnisse</b>	<b>117</b>
<b>B</b>	<b>Parameterdateien von WORHP</b>	<b>131</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Wiedereintritt in die Erd- und Marsatmosphäre . . . . .	5
2.2	Aufbau des Raumfahrzeugs (Explosionsgrafik) . . . . .	6
2.3	Vergleich der Kapseln der unterschiedlichen Missionen . . . . .	7
2.4	Überblick über die Phasen der Marslandung . . . . .	8
2.5	Definition der Zustände anhand verschiedener Koordinatensysteme . .	11
2.6	Atmosphäre von Erde und Mars . . . . .	13
2.7	Seitenansicht des Fahrzeugs mit den Kräften, die beim Atmosphären- eintritt auf das Fahrzeug wirken . . . . .	15
2.8	Korridor der zulässigen Trajektorien . . . . .	18
4.1	Vergleich von Steuerung und Regelung, schematisch dargestellt . . . .	34
4.2	Schematische Veranschaulichung der Idee des MPC-Verfahrens . . . .	36
4.3	Veranschaulichung eines MPC-Beispiels . . . . .	43
5.1	Schematische Darstellung Steuerung . . . . .	52
5.2	Schematische Darstellung Regelung . . . . .	57
5.3	Auswirkungen von Störungen auf die Atmosphärenendaten . . . . .	60
6.1	Optimale Steuerung zur Maximierung der Seitenreichweite . . . . .	64
6.2	Optimale Steuerung zu einem bestimmten Landepunkt . . . . .	67
6.3	Variation der Gewichtungparameter mit dem MPC-Verfahren bei End- kosten . . . . .	70
6.4	Variation des Zeithorizonts mit dem MPC-Verfahren bei Endkosten .	72
6.5	Exemplarische Lösung des MPC-Verfahrens bei Endkosten . . . . .	74
6.6	Lösung des MPC-Verfahrens bei Endkosten mit einem Zeithorizont von 120 s . . . . .	76
6.7	Abweichung der Atmosphäre von $-20\%$ mit dem MPC-Verfahren bei Endkosten . . . . .	79
6.8	Verschiedene mittlere Abweichungen der Atmosphäre mit dem MPC- Verfahren bei Endkosten . . . . .	81
6.9	Eintrittshöhe von 100 km mit dem MPC-Verfahren bei Endkosten . .	82
6.10	Eintrittsgeschwindigkeit von $6000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ mit dem MPC-Verfahren bei End- kosten . . . . .	84
6.11	Verschiedene Eintrittshöhen und Eintrittsgeschwindigkeiten mit dem MPC-Verfahren bei Endkosten . . . . .	86

6.12	Variation der Gewichtungsparmeter mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Geschwindigkeit als Referenzgröße . . . . .	89
6.13	Endzustände bei unterschiedlichen Eintrittshöhen und Eintrittsgeschwindigkeiten mit dem MPC-Verfahren mit Referenztrajektorie . . . . .	91
6.14	Variation des Zeithorizonts mit dem MPC-Verfahren mit Referenztrajektorie . . . . .	93
6.15	Exemplarische Lösung des MPC-Verfahrens mit Referenztrajektorie .	94
6.16	Abweichung der Atmosphäre von $-20\%$ mit dem MPC-Verfahren mit Referenztrajektorie . . . . .	97
6.17	Verschiedene mittlere Abweichungen der Atmosphäre mit dem MPC-Verfahren mit Referenztrajektorie . . . . .	99
6.18	Verschiedene mittlere Abweichungen der Konstanten $C_D$ und $C_L$ mit dem MPC-Verfahren mit Referenztrajektorie . . . . .	100
6.19	Eintrittshöhe von 100 km mit dem MPC-Verfahren mit Referenztrajektorie . . . . .	102
6.20	Eintrittsgeschwindigkeit von $6000 \frac{m}{s}$ mit dem MPC-Verfahren mit Referenztrajektorie . . . . .	104
6.21	Verschiedene Eintrittshöhen und Eintrittsgeschwindigkeiten mit dem MPC-Verfahren mit Referenztrajektorie . . . . .	106
6.22	Verschiedene Eintrittshöhen und Störungen der Atmosphäre mit dem MPC-Verfahren mit Referenztrajektorie . . . . .	107
6.23	Verschiedene Eintrittsgeschwindigkeiten und Störungen der Atmosphäre mit dem MPC-Verfahren mit Referenztrajektorie . . . . .	108
A.1	Vergleich der Lösungen bei einem nach Norden (durchgezogene Linie) und nach Osten (gestrichelte Linie) definierten Bahnazimut. . . . .	118
A.2	Optimale Steuerung zum Breitengrad $\tilde{\varphi} = 23,3^\circ N$ . . . . .	119
A.3	Variation der Gewichtungsparmeter mit dem MPC-Verfahren bei Endkosten mit $w_h = 0,95$ . . . . .	120
A.4	Variation der Gewichtungsparmeter mit dem MPC-Verfahren bei Endkosten mit $w_h = 0,97$ . . . . .	121
A.5	Variation der Gewichtungsparmeter mit dem MPC-Verfahren bei Endkosten mit $w_h = 0,98$ . . . . .	122
A.6	Lösung des MPC-Verfahrens mit Zeit als Referenz und konstanter Gewichtung . . . . .	123
A.7	Lösung des MPC-Verfahrens mit Geschwindigkeit als Referenz und konstanter Gewichtung . . . . .	124
A.8	Verschiedene mittlere Abweichungen der Atmosphäre mit dem MPC-Verfahren mit Referenztrajektorie . . . . .	125
A.9	Verschiedene mittlere Abweichungen der Konstanten $C_D$ und $C_L$ mit dem MPC-Verfahren mit Referenztrajektorie . . . . .	126

# Tabellenverzeichnis

2.1	Vergleich von Eckdaten der MSL-Mission mit früheren Missionen . . .	6
2.2	Variablen zur Beschreibung der Position und Lage eines Fahrzeugs . .	10
2.3	Übersicht wichtiger Kenngrößen des Mars . . . . .	12
2.4	Übersicht der Kenngrößen des Fahrzeugs . . . . .	14
5.1	Übersicht aller Variablen des optimalen Steuerprozesses . . . . .	47
5.2	Strömungswiderstand $D_0$ bei verschiedenen Eintrittshöhen $h_0$ (links) und Eintrittsgeschwindigkeiten $V_0$ (rechts). . . . .	61
A.1	Zu Beginn der Untersuchungen durchgeführte Testfälle, um die Art der Skalierung, der Diskretisierung und der Berechnung der Ableitungen festzulegen. . . . .	130



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Erforschung des Mars

Seit Jahrhunderten interessieren sich die Menschen für die Frage, ob Leben auf anderen Planeten unseres Sonnensystems möglich ist (vgl. MUMMA [25]). Dabei steht vor allem der Mars im Fokus, da er aufgrund seiner Größe, seiner Entfernung zur Sonne und nicht zuletzt des Vorhandenseins einer Atmosphäre die erdähnlichsten Bedingungen liefert (vgl. BROWN et al. [5]). Aus diesem Grund ist es insbesondere die Suche nach außerirdischem Leben, die die Erforschung des Mars vorantreibt.

Mit *Viking 1* und *2* sind 1976 die ersten Raumsonden auf dem Mars gelandet. Die durchgeführten chemischen Untersuchungen konnten jedoch keinen endgültigen Beweis für biologische Aktivitäten auf dem Mars liefern (vgl. BROWN et al. [5]). In den letzten Jahrzehnten sind durch weitere Marsmissionen wichtige Fortschritte zur Beantwortung der Frage nach Leben auf dem Mars erzielt worden. Die 2004 erfolgreich durchgeführte Mission *Mars Exploration Rover* (MER) hat belegt, dass es vor Billionen von Jahren Wasser auf der Oberfläche des Mars gegeben hat (vgl. GROTZINGER [13]). Wasser ist zwar ein essentieller Bestandteil, um Leben, wie wir es verstehen, möglich zu machen, aber allein nicht ausreichend. Als Energiequelle für Mikroorganismen ist zudem das Vorkommen verschiedener chemischer Elemente notwendig (vgl. GROTZINGER et al. [14]). Die Ziele der derzeit laufenden Mission *Mars Science Laboratory* (MSL) sind unter anderem das Vorkommen dieser chemischen Elemente und die Umgebungen, in denen es Wasser gegeben hat, zu untersuchen (vgl. BROWN et al. [5]). Auch nach Abschluss dieser Mission wird es weiterführende Fragen bezüglich der vergangenen und der aktuellen Beschaffenheit des Planeten geben, sodass bereits zukünftige Marsmissionen, wie die Mission *ExoMars* (vgl. ESA [8]), in Planung sind.

Da die Aufgaben der Missionen immer komplexer werden, wird auch die technische Ausrüstung besser und damit auch sensibler. Aus diesem Grund steigen die Ansprüche an die verwendeten Verfahren zur Berechnung der Flugbahn. Von besonderem Interesse ist die sogenannte *Entry-Descent-Landing* (EDL) - Phase, die mit

dem Eintritt des Fahrzeugs in die Atmosphäre beginnt. Die von der Atmosphäre bedingten aerodynamischen Kräfte spielen eine wichtige Rolle bei der Reduktion der Geschwindigkeit des Fahrzeugs (vgl. VINH et al. [32, Kap. 6]). Zur Berechnung der Flugbahn werden die dem Prozess zugrunde liegenden flugdynamischen Gleichungen (vgl. WEILAND [35, Kap. 6]) verwendet.

Die Frage, in deren Zusammenhang sich auch diese Arbeit reiht, ist, welche mathematischen Verfahren geeignet sind, um unter Berücksichtigung der Dynamik des Systems mögliche Trajektorien zu berechnen. WINGROVE [37] hat bereits 1963 die Möglichkeiten prädiktiver Methoden zur Simulation von Wiedereintrittsproblemen erkannt. Jedoch stellen diese Verfahren hohe Anforderungen an den Rechner. Zusammen mit der Rechenleistung ist in den letzten Jahrzehnten das Interesse an modellprädiktiver Regelung (MPC) gewachsen. MPC-Verfahren nutzen die Vorhersage (oder *Prädiktion*) des zukünftigen Systemverhaltens, um die Steuerung dieses Systems zu optimieren. Während die lineare MPC bereits seit den 1970er Jahren beliebt ist, wird seit den 1990er Jahren auch intensiv an der nichtlinearen MPC geforscht (vgl. FIND-EISEN und ALLGÖWER [9]). Bei modellprädiktiver Regelung können Beschränkungen verschiedener Art berücksichtigt werden. Besonders diese Eigenschaft in Verbindung mit nichtlinearen Systemen macht MPC-Verfahren nach SHEARER und HEISE [30] für Anwendungen in der Raumfahrt interessant. Zu diesem Schluss kommen auch MEDAGODA und GIBBENS [23], die zudem den Einfluss des Prädiktionshorizonts und der Anzahl diskreter Punkte untersuchen.

Ein weiterer Vorteil modellprädiktiver Regelung ist, dass durch das Einbeziehen aktueller Messwerte stets auf Störungen reagiert werden kann. Da Wiedereintrittsprobleme sehr störanfällig sind, ist diese Fähigkeit nach LUO et al. [20] ein weiterer Grund für die Anwendung eines MPC-Verfahrens. Inwiefern dies auch für die Bahnplanung bei Eintrittsmanövern auf dem Mars zutrifft, soll im Rahmen dieser Arbeit herausgestellt werden.

## 1.2 Ziele und Gliederung der Arbeit

Die zentrale Frage dieser Arbeit stellt die Anwendbarkeit von nichtlinearer modellprädiktiver Regelung (MPC) auf ein Wiedereintrittsproblem dar. Für die Phase, die mit dem Eintritt in die Marsatmosphäre beginnt, soll die Bahnplanung mit einem MPC-Verfahren simuliert werden. Da es bei der Durchführung einer solchen Mission zu zahlreichen unvorhergesehenen Zwischenfällen kommen kann, ist insbesondere der Einfluss unterschiedlicher Störungen auf die berechnete Flugbahn von Bedeutung.

In Kapitel 2 erfolgt eine physikalische Beschreibung des Wiedereintrittsproblems. Um die dem Prozess zugrunde liegenden flugdynamischen Gleichungen zu verstehen, wird zunächst die Beschreibung des aktuellen Zustands des Fahrzeugs erläutert. Außerdem wird erklärt, wie sich der gesamte Prozess steuern lässt. Zudem werden Be-



schränkungen, die das Fahrzeug während der betrachteten Phase einhalten muss, eingeführt.

Um eine unter den gegebenen Bedingungen optimale Bahn zu bestimmen, wird mit dem physikalischen Modell und den geltenden Beschränkungen ein optimaler Steuerprozess formuliert. Dazu liefert Kapitel 3 die Grundlagen der nichtlinearen Optimierung und der optimalen Steuerung. Der Fokus liegt dabei auf der numerischen Lösung solcher Prozesse.

Mit Kapitel 4 schließt sich ein weiteres Kapitel über Hintergründe der numerischen Mathematik an. In diesem Fall steht die modellprädiktive Regelung im Mittelpunkt. Nach einer kurzen allgemeinen Einführung in die optimale Regelung werden die Idee und das Vorgehen bei der Anwendung eines MPC-Verfahrens erklärt. Anschließend werden verschiedene mögliche Formulierungen eines MPC-Problems und daraus folgende Aussagen über die Stabilität des Verfahrens diskutiert. Dadurch wird zudem die Bedeutung des Zeithorizonts in den Vordergrund gerückt.

Im darauf folgenden Kapitel 5 wird erläutert, wie mit den in Kapitel 3 und 4 vorgestellten mathematischen Verfahren das physikalische Modell des Wiedereintrittsproblem aus Kapitel 2 simuliert werden kann. Im Fall des MPC-Verfahrens ist bei der Formulierung des Problems vor allem der Umgang mit den zu erreichenden Endbedingungen von Bedeutung. Es werden zwei verschiedene Ansätze untersucht: Zum Einen gehen die Endbedingungen in Form von Endkosten in das zu minimierende Zielfunktional ein. Zum Anderen wird versucht, den Abstand zu einer im Vorfeld bestimmten Referenztrajektorie so gering wie möglich zu halten. Zudem werden in beiden Fällen mögliche Störungen simuliert.

Die Resultate von verschiedenen numerischen Simulationen werden in Kapitel 6 zusammengefasst. Zunächst wird durch Lösen des gesamten optimalen Steuerprozesses eine optimale Trajektorie berechnet. Im Anschluss werden die Ergebnisse der zwei in Kapitel 5 erläuterten Varianten des MPC-Verfahrens gegenübergestellt. In beiden Fällen wird zunächst der Einfluss verschiedener Parameter im ungestörten Fall untersucht. Diese Resultate werden genutzt, um das Verhalten bei etwaigen Störungen zu analysieren. Insbesondere werden Abweichungen des verwendeten Atmosphärenmodells und verschiedene Anfangswerte betrachtet.

Kapitel 7 liefert eine abschließende Bewertung der in Kapitel 6 vorgestellten Ergebnisse sowie einen Ausblick über mögliche Verbesserungen und Erweiterungen.

# Kapitel 2

## Eintritt in die Marsatmosphäre

In diesem Kapitel werden physikalische Grundlagen für die Bahnplanung für Wiedereintrittsmanöver erläutert. Es erfolgt zunächst eine Beschreibung des Ablaufs eines Wiedereintrittsmanövers am Beispiel der Marsmission *Mars Science Laboratory* (MSL, Abschnitt 2.1). Anschließend wird das zugrunde liegende Modell erklärt (Abschnitt 2.2).

Für das Gelingen einer solchen Mission ist eine sichere Landephase von entscheidender Bedeutung. Dabei werden je nach Eigenschaften des Himmelskörpers unterschiedliche Strategien angewandt. Bei Landemanövern auf dem Mond beispielsweise muss das Raumfahrzeug durch den Einsatz von Triebwerken abgebremst werden. Um beim Anflug auf die Erde die Geschwindigkeit zu reduzieren, kann dagegen die Erdatmosphäre ausgenutzt werden. Durch den von der Atmosphäre bedingten Strömungswiderstand kann das Raumfahrzeug abgebremst werden. Dabei wird die kinetische Energie in Wärme umgewandelt, sodass hohe Temperaturen an der Angriffsfläche des Fahrzeugs entstehen und der Einsatz eines Hitzeschildes notwendig ist.

Wie die Erde ist auch der Mars von einer Atmosphäre umgeben. Allerdings beträgt ihre Dichte nur etwa 1 % der Erdatmosphärendichte. Nach BRAUN und MANNING [4, S. 1] ist sie damit zwar dick genug, um erhebliche Wärmeentwicklungen zu verursachen, jedoch nicht, um die Geschwindigkeit des Fahrzeugs ausreichend zu verringern. Dadurch werden Fahrzeuge, die in die Marsatmosphäre eindringen, erst in sehr viel geringeren Höhen abgebremst als bei vergleichbaren Manövern auf der Erde. Aus diesem Grund ergeben sich unterschiedliche typische Flugbahnen, welche in Abbildung 2.1 dargestellt sind.

Durch die dünnere Atmosphäre des Mars verliert ein Raumfahrzeug erst ab einer Höhe von etwa 50 km stark an Geschwindigkeit und nicht wie beim Eintritt in die Erdatmosphäre bereits ab ca. 70 km (vgl. Abbildung 2.1). Aus diesem Grund bleibt weniger Höhe und somit weniger Zeit das Fahrzeug abzubremesen. Zudem ist die Abbremsung durch den Strömungswiderstand beim Anflug auf den Mars generell nicht so stark wie bei der Erde. Dies führt dazu, dass die Geschwindigkeit des Fahrzeugs zum Zeitpunkt des Eintritts in die Marsatmosphäre in der Regel deutlich geringer ist

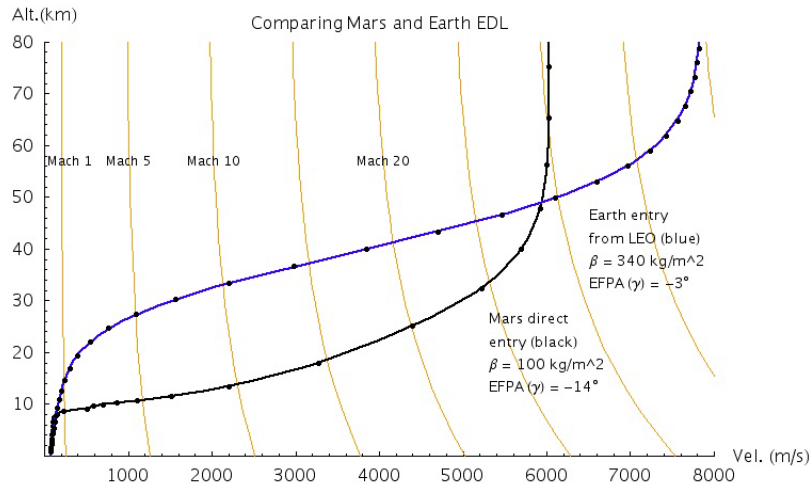


Abbildung 2.1: Vergleich typischer Flugbahnen beim Wiedereintritt in die Erd- und Marsatmosphäre<sup>1</sup>

als bei Landemanövern auf der Erde. In Abbildung 2.1 wird die Eintrittsgeschwindigkeit beim Mars mit etwa  $6000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und bei der Erde mit knapp unter  $8000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  angegeben. Zudem zeigt die Abbildung, dass die Geschwindigkeit bei Landemanövern auf dem Mars vor allem in geringen Höhen von 10 bis 30 km noch sehr viel höher ist als beim Eintritt in die Erdatmosphäre. Dadurch ist die Gefahr eines Aufpralls auf der Marsoberfläche deutlich höher.

Trotz dieser von der dünnen Atmosphäre bedingten Schwierigkeit hat es bisher sieben Missionen mit erfolgreicher Landung auf dem Mars gegeben: *Viking I* und *Viking II*, die 1976 ihr Ziel erreicht haben, *Mars Path Finder* (MPF, 1997), *Mars Exploration Rover* (MER-A und MER-B, beide 2004), *Phoenix* (2008) und *Mars Science Laboratory* (MSL, 2012). Alle diese Missionen wurden von der *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) durchgeführt. Einen groben Überblick über diese Missionen findet man beispielsweise bei BRAUN und MANNING [4]. Im folgenden Abschnitt soll anhand der aktuellsten Mission ein Landemanöver auf dem Mars nach heutigem technischen Stand vorgestellt werden. Das Vorgehen bei dieser Mission bestimmt die Parameter des in dieser Arbeit verwendeten physikalischen Modells.

## 2.1 Mission Mars Science Laboratory

Im Folgenden werden die wichtigsten Hintergründe der MSL-Mission kurz dargelegt. Genauere Information zur Planung und Durchführung der Mission finden sich beispielsweise bei STELTZNER et al. [31] oder WAY et al. [34]. Über die erfolgreiche

<sup>1</sup>Bildnachweis: BRAUN und MANNING [4, S. 2]

Parameter	Viking	MPF	MER	Phoenix	MSL
Masse beim Eintritt [kg]	980	585	836	603	3893
gelandete Masse [kg]	612	370	539	364	899
mobile Masse [kg]	0	11	173	0	899
Durchmesser Kapsel [m]	3,5	2,65	2,65	2,65	4,5
Durchmesser Fallschirm [m]	16,15	12,4	15,09	11,5	16
Höhe des Landungspunktes [km MOLA]	−3,5	−1,5	−1,3	−3,5	1

Tabelle 2.1: Vergleich von Eckdaten der MSL-Mission mit früheren Missionen<sup>3</sup>

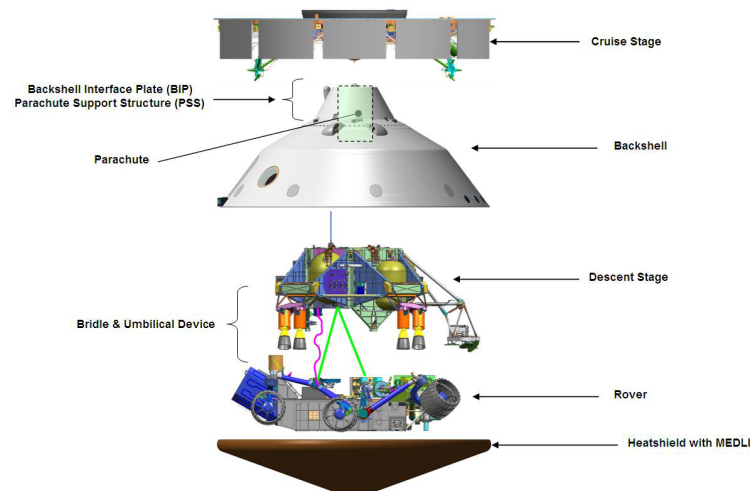


Abbildung 2.2: Aufbau des Raumfahrzeugs (Explosionsgrafik)<sup>4</sup>

Landung und aktuelle Untersuchungen des Rovers gibt es zudem Informationen im Internet, beispielsweise auf den Seiten der NASA<sup>2</sup>.

Die Mission MSL ist am 26.11.2011 von der *Cape Canaveral Air Force Station* in Florida gestartet und am 06.08.2012 im Nordwesten des Gale-Kraters auf dem Mars gelandet. Das Ziel der Mission ist es, die Suche nach einem Beweis für vergangenes Leben auf dem Mars fortzusetzen und zu diesem Zweck verschiedene wissenschaftliche Untersuchungen durchzuführen (vgl. NASA [28]). Der Rover *Curiosity*, der nun seit fast zwei Jahren die Marsoberfläche erkundet und schon große Mengen an Daten zur Erde gesandt hat, ist die bislang größte und mit etwa 900 kg zudem die mit Abstand schwerste Einheit, die bisher auf dem Mars gelandet ist (vgl. Tabelle 2.1).

In Abbildung 2.2 ist der Aufbau des Raumfahrzeugs schematisch in einer Explosionsgrafik dargestellt. Die zentrale Einheit des Fahrzeugs bildet der Rover *Curiosity*.

<sup>2</sup>[http://www.nasa.gov/mission\\_pages/msl/index.html](http://www.nasa.gov/mission_pages/msl/index.html)

<sup>3</sup>Daten von WAY et al. [34, S. 4]

<sup>4</sup>Bildnachweis: WAY et al. [21, S. 3]

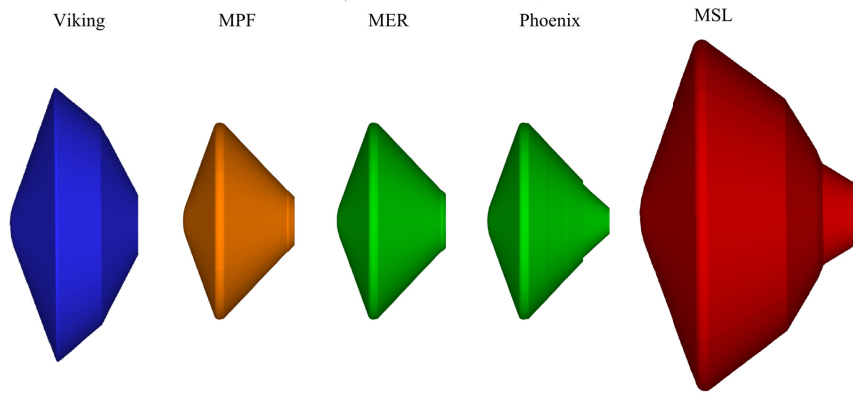


Abbildung 2.3: Vergleich der Kapseln der unterschiedlichen Missionen<sup>5</sup>

Er befindet sich verbunden mit einer Abstiegsstufe in einer Kapsel. Am unteren Teil des Fahrzeugs befindet sich ein Hitzeschild, das die anderen Komponenten vor den extrem hohen Temperaturen beim Atmosphäreneintritt schützt. Im obersten Teil der Kapsel ist ein Fallschirm befestigt. Auch dieser gehört mit einem Durchmesser von 16 m zu den größten unter seinen Vorgängern (vgl. Tabelle 2.1). Oberhalb der Kapsel ist das Marschflugmodul angebracht, welches für die Steuerung während des Flugs durch den Weltraum verantwortlich ist. Vor dem Eintritt in die Atmosphäre wird dieses Modul abgeworfen. Weitere technische Details zu den einzelnen Komponenten des Fahrzeugs können beispielsweise bei MAKOVSKY et al. [21] nachgelesen werden.

Das Design der Kapsel beruht auf dem Konzept der Viking-Missionen aus den 70er Jahren. Für die MSL-Mission wurde versucht, die bewährten Technologien mit neuen Innovationen zu verbinden, was unter anderem von WAY et al. [34] beschrieben wird. Abbildung 2.3 zeigt, dass sich das Design der Kapsel während der verschiedenen Missionen kaum verändert hat, die Größe hingegen schon. Dies ist vor allem auf die immer komplexer werdenden Aufgaben und dadurch notwendige technische Ausrüstung des Rovers zurückzuführen. Diese umfangreiche Ausrüstung führt auch dazu, dass Curiosity etwa fünf mal so schwer ist wie die letzten mobilen Einheiten, die 2004 mit den MER-Missionen ihr Ziel erreicht haben.

Gegenüber früheren Marsmissionen bestand die Schwierigkeit nicht nur darin, dass der Rover deutlich schwerer ist, sondern zudem in der ausgewählten Landeregion zu landen. Bei dem Gale-Krater handelte es sich erstmals um ein Ziel, das nach MOLA<sup>6</sup> im positiven Bereich liegt (vgl. Tabelle 2.1), wodurch die Landephase weiter verkürzt wurde. Zudem ist die Marsoberfläche in diesem Gebiet sehr uneben, sodass die angestrebte maximale Abweichung vom Landeplatz von ungefähr 60 km bei MER

<sup>5</sup>Bildnachweis: WAY et al. [34, S. 3]

<sup>6</sup>Die Höhe auf dem Mars wird anhand des NASA-Programms *Mars Orbiting Laser Altimeter* (MOLA) [31] definiert.

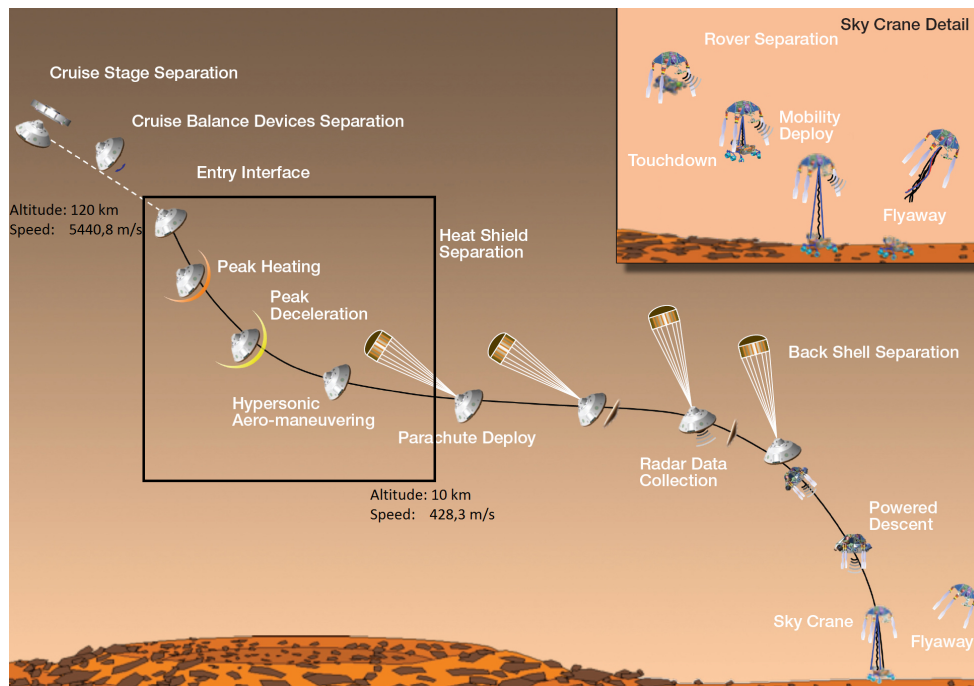


Abbildung 2.4: Überblick über die Phasen der Marslandung<sup>7</sup>

2004 auf etwa 12,5 km reduziert wurde (vgl. STELTZNER et al. [31]). Aus diesen Gründen wurde eine neue *Entry-Descent-Landing (EDL)* - Methode entwickelt.

Die wichtigen Ereignisse der EDL-Phase sind in Abbildung 2.4 schematisch dargestellt. Vor dem Atmosphäreneintritt wird die Steuerung des Fahrzeugs vom Marsflugmodul übernommen. Da dieses in der EDL-Phase nicht mehr benötigt wird, wird es kurz vor dem Wiedereintritt abgeworfen. Da ein Signal vom Mars zur Erde etwa 14 Minuten benötigt, die Zeit vom Eintritt in die Atmosphäre bis zum Aufsetzen auf der Marsoberfläche jedoch nur etwa 7 Minuten beträgt, muss die Steuerung während der EDL-Phase komplett selbstständig ablaufen.

Bei der MSL-Mission wird das Fahrzeug in der Phase des sogenannten *guided entry* über den Rollwinkel gesteuert (engl.: *bank angle control*). Neben dem Marsflugmodul werden kurz vor dem Eintritt in die Atmosphäre zudem acht je etwa 25 kg schwere Kontrollgewichte abgeworfen. Dadurch wird erreicht, dass der Schwerpunkt des Fahrzeugs nicht mehr, wie im bisherigen Flug, auf der Symmetrieachse liegt. Die Verlagerung des Schwerpunktes führt dazu, dass das Fahrzeug durch Änderung des Rollwinkels asymmetrisch gedreht und somit der Auftrieb reguliert werden kann. Dieses Prinzip wird in Abschnitt 2.2.2 erläutert.

Um die Genauigkeit des Landepunktes zu erhöhen, ist es wichtig, die Position und Lage des Fahrzeugs zum Zeitpunkt des Wiedereintritts möglichst genau zu kennen. Ab

<sup>7</sup>Bildnachweis: BROWN et al. [5] (verändert)

diesem Moment kann anhand von IMU-Daten (engl.: *inertial measurement unit*) die aktuelle Position bestimmt und zur Echtzeit-Navigation genutzt werden. Von ASTRUM [1] werden Untersuchungen zu einem der MSL-Mission ähnlichen Szenario ange stellt. Die dort angegebenen Werte werden auch für die Betrachtungen in dieser Arbeit verwendet. Es wird angenommen, dass das Fahrzeug beim Atmosphäreneintritt in 120 km Höhe eine Geschwindigkeit von  $5440,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  hat. In einer Höhe von mindestens 10 km wird der Fallschirm geöffnet. Damit dieser den auftretenden Kräften standhalten kann, muss die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt um mehr als 90 % verringert worden sein. Neben der Geschwindigkeitsreduktion soll die Steuerung durch den Rollwinkel dafür sorgen, dass die Position des Fahrzeugs beim Öffnen des Fallschirms so gewählt ist, dass der gewünschte Landepunkt in Reichweite ist. Die Phase vom Wiedereintritt in 120 km Höhe bis zur Fallschirmöffnung in 10 km Höhe dauert etwa vier Minuten (vgl. BROWN et al. [5, S. 228]).

Zudem muss bei der Bahnplanung beachtet werden, dass die mechanischen und thermodynamischen Beschränkungen des Fahrzeugs eingehalten werden. Abbildung 2.4 zeigt, dass das Fahrzeug in der Phase des *guided entry* den höchsten Belastungen bezüglich der Temperatur ausgesetzt ist und die stärkste Abbremsung erfährt. Da in dieser Arbeit die Bahnplanung für diese Phase untersucht werden soll, ist sie in der Abbildung durch eine schwarze Umrandung hervorgehoben.

Durch die Öffnung des Fallschirms wird die letzte Abbremsung des Fahrzeugs eingeleitet. Anschließend wird das nun nicht mehr benötigte Hitzeschild abgeworfen. Kurz darauf beginnen Radarmessungen, um Höhe und Geschwindigkeit zu bestimmen. Wenn die Geschwindigkeit gering genug ist, löst sich der Fallschirm von der Abstiegsstufe. Diese befindet sich kurzzeitig im freien Fall bis die acht Bremsraketen einsetzen. In einer Höhe von etwa 20 m beginnt das Sky-Crane-Manöver. Dabei wird der Rover an mehreren etwa 8 m langen Seilen herabgelassen. Dieses Verfahren unterscheidet sich sehr stark von der bei den vorherigen Missionen durchgeführten Airbag-Methode und sorgt dafür, dass selbst ein so schwerer Rover wie Curiosity auf unebener Oberfläche sicher aufgesetzt werden kann.

## 2.2 Modellbildung des Wiedereintrittsproblems

Nachdem der grobe Ablauf einer Marslandung im vorherigen Abschnitt erläutert wurde, soll in diesem Abschnitt ein vollständiges physikalisches Modell der Wiedereintrittsphase vorgestellt werden. Dieses bildet die Grundlage für die Berechnung der optimalen Bahn.

Im Rahmen dieser Arbeit wird nur die in Abbildung 2.4 hervorgehobene Phase vom Eintritt in die Atmosphäre bis zur Öffnung des Fallschirms betrachtet. Das Ziel ist es, eine optimale Steuerung zu finden, sodass der Fallschirm in mindestens 10 km Höhe über der Marsoberfläche geöffnet werden kann und der gewünschte Landeplatz auf

dem Mars in Reichweite ist. Damit der Fallschirm den auftretenden Kräften standhalten kann, darf die Machzahl  $M$  in dieser Höhe einen Wert von 1,9 nicht überschreiten. Dies entspricht den bei ASTRUM [1, S. 31] geforderten Endbedingungen. Die Machzahl beschreibt das Verhältnis der Geschwindigkeit  $V$  zur Schallgeschwindigkeit  $c$ , welche von der Dichte und der Temperatur und damit im später erläuterten Atmosphärenmodell von der Höhe  $h$  abhängig ist:

$$M = \frac{V}{c(h)} \quad (2.1)$$

Das Fahrzeug darf also in einer Höhe von mindestens 10 km noch höchstens mit 1,9-facher Schallgeschwindigkeit fliegen.

Die Position und Lage des Fahrzeugs im Bezug zum Mars wird durch sechs Größen beschrieben. Die Höhe  $h$ , die geographische Länge  $\lambda$  und die geographische Breite  $\varphi$  geben die Position über der Marsoberfläche in sphärischen Koordinaten an. Die Geschwindigkeit wird ebenfalls durch sphärische Koordinaten beschrieben. Der Betrag der Geschwindigkeit wird mit  $V$  bezeichnet und die Richtung wird durch den Bahnneigungswinkel  $\gamma$  und den Bahnazimut  $\chi$  bestimmt. Tabelle 2.2 gibt einen Überblick über diese Größen mit zugehöriger Einheit und dem zulässigen Definitionsbereich.

	Beschreibung	Einheit	Definitionsbereich
$h$	Höhe über der Marsoberfläche	km	$\mathbb{R}_{\geq 0}$
$\lambda$	geographische Länge	°	$[-180, 180]$
$\varphi$	geographische Breite	°	$[-90, 90]$
$V$	Geschwindigkeit	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$\mathbb{R}$
$\gamma$	Bahnneigungswinkel	°	$[-90, 90]$
$\chi$	Bahnazimut	°	$[-180, 180]$

Tabelle 2.2: Variablen zur Beschreibung der Position und Lage eines Fahrzeugs

In der Raumfahrt werden diese Größen üblicherweise in unterschiedlichen Koordinatensystemen definiert. Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 2.5 das *Planet-Centered-Inertial (PCI)* - System orange dargestellt und das *Planet-Centered-Planet-Fixed (PCPF)* - System rot. Beide Systeme haben ihren Ursprung im Mittelpunkt des Planeten und die  $z$ -Achse liegt auf der Rotationsachse in Richtung des Nordpols. Beim PCI-System ist die  $x$ -Achse in Richtung des Frühlingspunktes definiert, sodass dieses System bezüglich des Sonnensystems ruht. Im Gegensatz dazu rotiert das PCPF-System mit dem Planeten mit. In diesem Fall geht die  $x$ -Achse durch den Schnittpunkt des Nullmeridian mit dem Äquator. Bei beiden Systemen ist die  $y$ -Achse so definiert, dass sich ein Rechtssystem ergibt. Somit entspricht die  $xy$ -Ebene in beiden Systemen der Äquatorebene des Planeten.



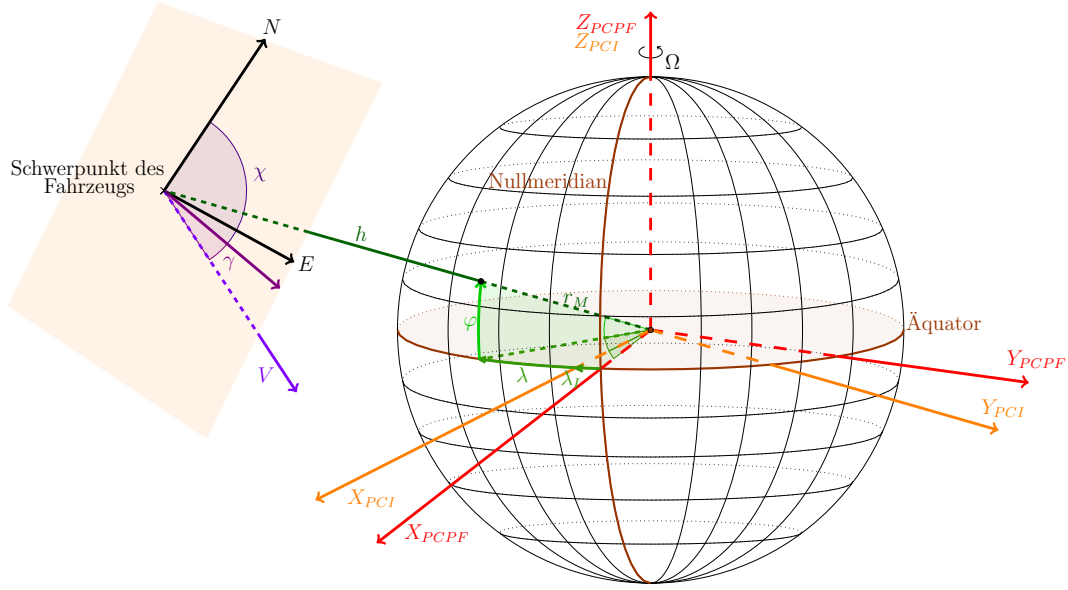


Abbildung 2.5: Definition der Zustände anhand verschiedener Koordinatensysteme

Die Positionskoordinaten  $h$ ,  $\lambda$  und  $\varphi$  werden im PCI-System angegeben. Um auf die tatsächliche geographische Länge im PCPF-System zu kommen, muss die Differenz im Längengrad zum PCI-System  $\lambda_I$  (vgl. Abbildung 2.5) addiert werden. In dem hier dargestellten Fall ist die geographische Länge  $\lambda$  negativ und die geographische Breite  $\varphi$  positiv.

Die Koordinaten zur Beschreibung der Geschwindigkeit des Fahrzeugs werden üblicherweise in einem Koordinatensystem angegeben, das den Schwerpunkt des Fahrzeugs als Ursprung hat. So werden der Bahnneigungswinkel  $\gamma$  und der Azimut  $\chi$  im *Local-Geodetic*-System definiert. Um große Unübersichtlichkeit zu vermeiden, sind nur die für die Definition der Winkel wichtigen Bestandteile dieses Koordinatensystems in Abbildung 2.5 eingezeichnet. Detaillierte Abbildungen einzelner Koordinatensysteme sind bei ASTRIUM [33] zu finden. Zur Definition der Winkel wird die in Abbildung 2.5 angedeutete Ebene benötigt. Diese liegt so, dass der Positionsvektor

$$\begin{pmatrix} (h + r_M) \cos \varphi \cos \lambda \\ (h + r_M) \cos \varphi \sin \lambda \\ (h + r_M) \sin \varphi \end{pmatrix}$$
 ein Normalenvektor der Ebene ist. Der Geschwindigkeitsvektor kann auf diese Ebene projiziert werden. Der Winkel zwischen dieser Projektion und dem Geschwindigkeitsvektor ist der Bahnneigungswinkel  $\gamma$ . In der Abbildung fliegt das Fahrzeug von der Ebene aus nach unten, was bedeutet, dass  $\gamma$  in diesem Fall negativ ist. Als weitere Richtungsangabe der Geschwindigkeit wird der Bahnazimut  $\chi$  angegeben. Dieser ist der Winkel zwischen der genannten Projektion und der Nordrichtung der Ebene (vgl. Abbildung 2.5) und ist hier positiv. In der Literatur wird dieser Winkel teilweise nach Osten definiert, zum Beispiel bei WEILAND [35].

### 2.2.1 Charakteristische Eigenschaften des Mars und seiner Atmosphäre

Um eine Flugbahn durch die Atmosphäre des Mars zu berechnen, müssen einige für den Mars spezifische Parameter bekannt sein. Diese sind in Tabelle 2.3 aufgelistet. Bei der Modellierung wird der Mars näherungsweise als Kugel betrachtet. Mit einem Radius von 3393,94 km ist der Mars etwas mehr als halb so groß wie die Erde. Durch die Angabe der Gravitationskonstante  $\mu$  und der Entfernung zum Marsmittelpunkt

$$r = h + r_M$$

kann die vom Mars ausgehende Gravitationsbeschleunigung  $g_M$  berechnet werden. Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz gilt

$$g_M = \frac{\mu}{r^2}.$$

Damit erhält man auf der Marsoberfläche eine Gravitationsbeschleunigung von etwa  $3,72 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , was ca. 38 % der Erdbeschleunigung entspricht. In größeren Höhen nimmt dieses Verhältnis geringfügig ab.

Parameter	Beschreibung	Wert
$r_M$	Äquatorialradius	3393,94 km
$\mu$	Gravitationskonstante	$4,282\,828\,29 \cdot 10^{13} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$
$\Omega$	Rotationsgeschwindigkeit	$7,088\,218 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$k_M$	Sutton-Graves-Konstante	$1,9027 \cdot 10^{-4} \frac{\sqrt{\text{kg}}}{\text{m}^2}$

Tabelle 2.3: Übersicht wichtiger Kenngrößen des Mars

Die Rotationsgeschwindigkeit  $\Omega$  und die Sutton-Graves-Konstante  $k_M$  werden bei späteren Berechnungen benötigt. Die Sutton-Graves-Konstante hängt von der Zusammensetzung der Atmosphäre ab. Nach Angaben der NASA [36] besteht die Marsatmosphäre zu über 95 % aus Kohlenstoffdioxid. Weitere wichtige Bestandteile sind Stickstoff (2,7 %), Argon (1,6 %), Sauerstoff (0,13 %) und Kohlenstoffmonoxid (0,08 %). Der in Tabelle 2.3 angegebene Wert für  $k_M$  ist MARSCH und BRAUN [22, S. 274] entnommen. Bei anderen Autoren findet man teilweise abweichende Angaben, da es unterschiedliche Sichtweisen zur Bestimmung dieser Konstanten gibt.

Da bei der Landung der Strömungswiderstand für die Reduzierung der Geschwindigkeit des Fahrzeugs genutzt wird, spielt die Dichte  $\rho$  der Atmosphäre eine große Rolle bei der Modellierung. Abbildung 2.6 zeigt einen Vergleich des Dichteprofiles des Mars mit dem der Erde. Die in grün eingezeichneten Werte für die Dichte der Erdatmosphäre stammen aus den Daten der *US-Standardatmosphäre 1976* [18, S. 16]. Für die

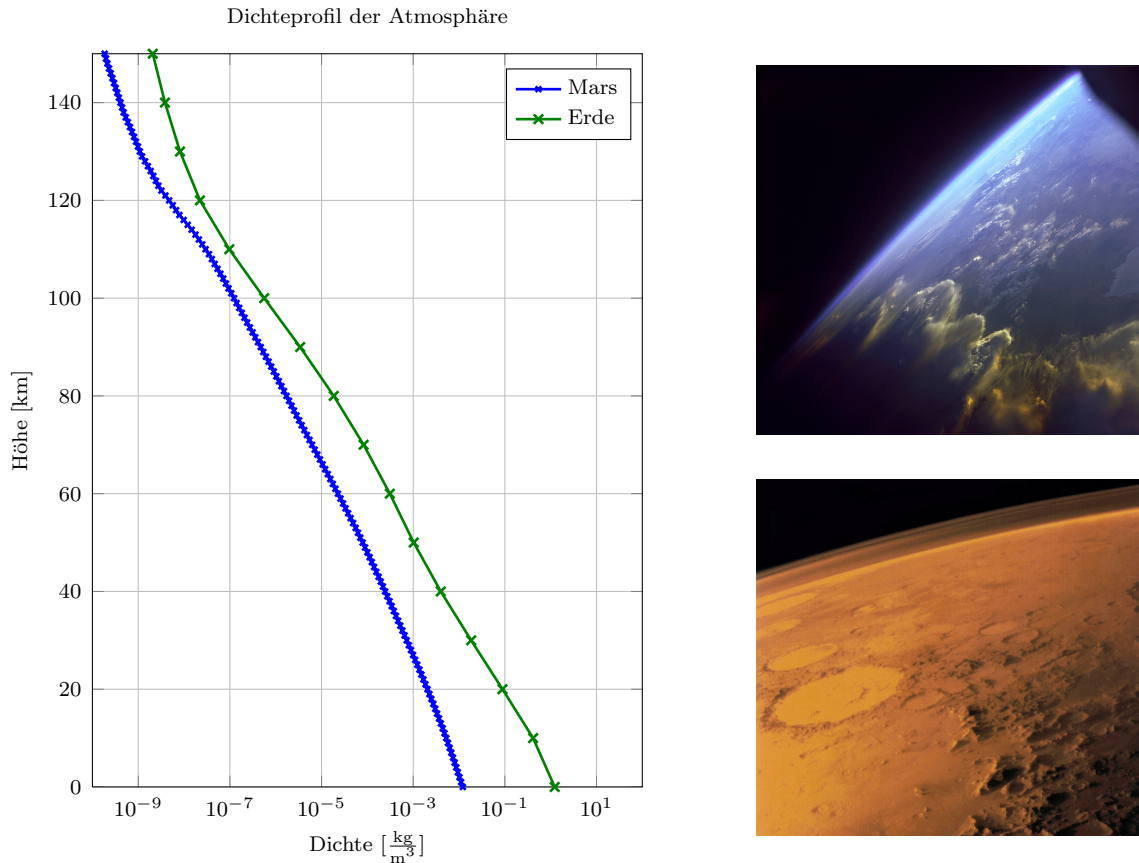


Abbildung 2.6: Atmosphäre von Erde und Mars. Links: Vergleich des Profils der atmosphärischen Dichte. Rechts: Weltraumaufnahmen der Atmosphären der Erde<sup>9</sup>(oben) und des Mars<sup>10</sup>(unten).

Daten vom Mars (blau) wird das Atmosphärenmodell *ESA Mars Climate Database* (EMCD, Version 4.1) verwendet.<sup>8</sup> In dieser Arbeit werden die Atmosphären Daten für  $25^\circ$  nördliche Breite und  $0^\circ$  östliche Länge betrachtet. Dies entspricht der Position zum Zeitpunkt des Wiedereintritts nach ASTRUM [1, S. 37]. Änderungen der Eigenschaften der Atmosphäre aufgrund der Veränderung der Position während des Flugs können vernachlässigt werden. Die Abbildung verdeutlicht, dass die Atmosphäre des Mars in jeder Höhe dünner ist als die der Erde. An der logarithmisch aufgetragenen  $x$ -Achse kann man erkennen, dass an der Oberfläche die Dichte der Marsatmosphäre nur etwa 1 % der Dichte der Erdatmosphäre beträgt. In größeren Höhen ist der Unterschied nicht ganz so groß, aber auch hier macht die Dichte der Marsatmosphäre höchstens 30 % der Dichte der Erdatmosphäre aus.

<sup>8</sup>Die Daten sind auszugsweise frei zugänglich unter <http://www-mars.lmd.jussieu.fr>.

<sup>9</sup>Bildnachweis: NASA [26]

<sup>10</sup>Bildnachweis: NASA [27]

In großen Höhen ist der Dichteunterschied somit nur geringfügig größer als der Unterschied in der Gravitationsbeschleunigung (ca. 37 %). An der Oberfläche hingegen beträgt die Dichte des Mars nur 1 % der Dichte der Erde, während die Gravitationsbeschleunigung etwa 38 % der Erdbeschleunigung beträgt. Fahrzeuge beim Eintritt in die Marsatmosphäre werden somit vor allem in geringeren Höhen wesentlich schwächer abgebremst als beim Anflug auf die Erde. Der Gravitationsunterschied ist hingegen nicht so groß, sodass das Fahrzeug trotzdem recht schnell an Höhe verliert. Dies stellt eine große Herausforderung für die Bahnplanung von Marsmissionen dar.

Neben den Werten für die Dichte stellt das Atmosphärenmodell EMCD ebenfalls höhenabhängige Daten für die Schallgeschwindigkeit in tabellarischer Form zur Verfügung. Diese werden zur Berechnung der Machzahl (vgl. Gleichung (2.1)) verwendet.

### 2.2.2 Eigenschaften des Raumfahrzeugs

In die Modellgleichungen fließen neben den vom Mars bedingten Größen auch fahrzeugspezifische Eigenschaften mit ein. In dieser Arbeit wird analog zu den Untersuchungen von ASTRUM [1, S. 31] ein Fahrzeug mit einem Gewicht von 1050 kg zum Zeitpunkt des Eintritts betrachtet. Wie in der Luftfahrt üblich wird der vorderste Teil des Fahrzeugs als Nase bezeichnet. Der demnach sogenannte Nasendurchmesser der Kapsel beträgt 2,8 m. Für die später erläuterte Berechnung der Wärmeentwicklung ist der effektive Nasenradius  $r_N$  von Bedeutung. Dieser kann als ein Viertel des Nasendurchmessers approximiert werden. Zudem wird zur Berechnung auftretender Kräfte eine Referenzfläche  $S$  benötigt. Da diese als kreisförmig angenommen wird, kann der Flächeninhalt allein aus dem Nasendurchmesser bestimmt werden. Die Konstanten sind in Tabelle 2.4 zusammengetragen.

	Beschreibung	Wert
$m$	Masse	1050 kg
$S$	Referenzfläche	6,1575 m <sup>2</sup>
$r_N$	effektiver Nasenradius	0,7 m

Tabelle 2.4: Übersicht der Kenngrößen des Fahrzeugs

### Auftrieb und Strömungswiderstand

Da die kinetische Energie des Fahrzeugs durch den Strömungswiderstand in Wärme umgewandelt wird, ist die Berücksichtigung des Auftriebs und des Strömungswiderstands bei der Modellierung wichtig. Die Wirkung dieser Kräfte wird in diesem Abschnitt aufbauend auf den Erläuterungen zur MSL-Mission von STELTZNER et al. [31] beschrieben.

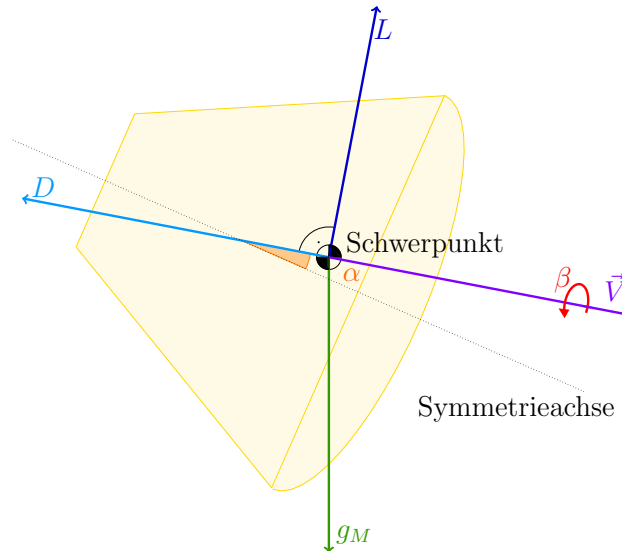


Abbildung 2.7: Seitenansicht des Fahrzeugs mit den Kräften, die beim Atmosphären-eintritt auf das Fahrzeug wirken

Das Raumfahrzeug ist so konstruiert, dass durch den Abwurf von Kontrollgewichten kurz vor dem Wiedereintritt sein Massenschwerpunkt von der Symmetrieachse verschoben wird. Diese Situation ist in Abbildung 2.7 anhand eines Querschnitts durch das Fahrzeug dargestellt. Durch die Verschiebung des Schwerpunkts wird ein Anstellwinkel  $\alpha$  zwischen der Symmetrieachse und dem Geschwindigkeitsvektor erzeugt. Um diesen Vektor vom skalaren Wert der Geschwindigkeit zu unterscheiden, wird er in der Abbildung mit  $\vec{V}$  bezeichnet. Der Anstellwinkel  $\alpha$  beträgt in der Eintrittsphase zwischen 18 und 20° (vgl. STELTZNER et al. [31, S. 5]). Es wird angenommen, dass das Fahrzeug statisch und dynamisch stabil ist (vgl. [16, Kap. 5.4]). Unter dieser Voraussetzung kann der Anstellwinkel  $\alpha$  vereinfachend als konstant 20° angenommen werden.

Der Strömungswiderstand  $D$  (engl.: *drag*) wirkt dem Geschwindigkeitsvektor  $\vec{V}$  entgegen und ist somit die bremsende Kraft (vgl. Abbildung 2.7). Der Auftrieb  $L$  (engl.: *lift*) steht senkrecht auf diesen Vektoren. Je mehr diese Kraft der Gravitationsbeschleunigung des Mars  $g_M$  entgegenwirkt, desto weniger verliert das Fahrzeug an Höhe. Aus diesem Grund spielt die Ausrichtung des Auftriebs eine wichtige Rolle bei der Berechnung der Flugbahn. Durch acht kleine Düsen kann das Fahrzeug um seine Geschwindigkeitsachse gedreht werden. Somit wird der Auftriebsvektor um die Geschwindigkeitsachse rotiert. Der Winkel, der diese Rotation angibt, heißt Rollwinkel  $\beta$  und ist in Abbildung 2.7 rot dargestellt. Bei vollem Auftrieb gilt  $\beta = 0^\circ$ .

Nach VINH et al. [32, S. 57f] kann der Strömungswiderstand  $D$  und der Auftrieb  $L$  folgendermaßen berechnet werden:

$$D = \frac{1}{2} \rho(h) V^2 S C_D(M, \alpha) \quad (2.2)$$

$$L = \frac{1}{2} \rho(h) V^2 S C_L(M, \alpha) \quad (2.3)$$

Die Koeffizienten  $C_D$  und  $C_L$  werden für das jeweilige Fahrzeug im Windkanal getestet oder aufwendig berechnet und liegen tabellarisch in Abhängigkeit von der Machzahl  $M$  und dem Anstellwinkel  $\alpha$  vor. Da der Anstellwinkel als konstant angenommen wird, ist bei der Berechnung nur die Abhängigkeit von der Machzahl von Bedeutung.

### Pfadbeschränkungen

Damit das Fahrzeug während der Wiedereintrittsphase nicht verglüht oder Beschädigungen durch zu hohe Belastungen entstehen, müssen bestimmte Beschränkungen eingehalten werden. Diese Pfadbeschränkungen werden im Folgenden erläutert.

Trotz des Hitzeschilds besteht die größte Gefahr darin, dass das Fahrzeug bei zu großer Wärmebelastung verglüht. Aus diesem Grund darf die Wärmeflussdichte  $\dot{Q}$  zu keinem Zeitpunkt eine bestimmte Maximalgrenze  $\dot{Q}_{Max}$  überschreiten, die hauptsächlich von dem Material und der Struktur des Fahrzeugs abhängt. Zur Berechnung der Wärmeflussdichte wird die Sutton-Graves-Gleichung (vgl. MARSCH und BRAUN [22, S. 274]) angewandt:

$$\dot{Q} = k_M \sqrt{\frac{\rho(h)}{r_N}} V_{rel}^3 \quad (2.4)$$

Die relative Geschwindigkeit  $V_{rel}$  ist die Geschwindigkeit des Fahrzeugs  $V$  relativ zur Atmosphäre. Die Geschwindigkeit, mit der der Mars vom Standpunkt des Fahrzeugs aus rotiert, wird mit  $V_M$  bezeichnet und berechnet sich aus der Rotationsgeschwindigkeit des Mars und der Position des Fahrzeugs über dem Mars:

$$V_M = \Omega r \cos \varphi$$

Bei einem Bahnazimut von  $90^\circ$  bewegt sich das Fahrzeug entlang eines Breitengrades Richtung Osten und somit in die gleiche Richtung wie der Mars sich dreht. Die relative Geschwindigkeit beträgt also in diesem Fall  $V_{rel} = V - V_M$ . Bei  $\chi = -90^\circ$  fliegt das Fahrzeug entsprechend in die entgegengesetzte Richtung, sodass sich  $V_{rel} = V + V_M$  ergibt. Aufgrund einfacher trigonometrischer Zusammenhänge gilt demnach allgemein:

$$V_{rel} = V - V_M \sin \chi$$

Neben der Wärmeflussdichte ist auch der dynamische Druck  $q$  des Fahrzeugs einer Maximalgrenze unterworfen. Dieser ist, wie beispielsweise bei HIRSCHER und WEILAND [16, S. 18] angegeben, von der Dichte und der relativen Geschwindigkeit abhängig:

$$q = \frac{1}{2} \rho(h) V_{rel}^2 \quad (2.5)$$

Zudem muss berücksichtigt werden, dass die Gesamtkraft, die auf das Fahrzeug wirkt, ein gewisses Vielfaches der Gravitationskraft nicht überschreiten darf. Diese Gesamtkraft kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras aus dem Kräfteparallelogramm des Strömungswiderstands  $D$  und des Auftriebs  $L$  (vgl. Abbildung 2.7) berechnet werden. Das sogenannte Lastvielfache  $n$  gibt das Verhältnis der Gesamtkraft zur Gravitationskraft  $m \cdot g_E$  an:

$$n = \frac{\sqrt{D_{rel}^2 + L_{rel}^2}}{m g_E} \quad (2.6)$$

Für die Kräfte  $D_{rel}$  und  $L_{rel}$  wird bei der Berechnung mit den Gleichungen (2.2) und (2.3) die relative Geschwindigkeit  $V_{rel}$  verwendet. Die Gravitationskraft der Erde wird mit  $g_E = 9,80665 \frac{m}{s^2}$  angesetzt.

Es werden also Beschränkungen bezüglich der Wärmeflussdichte  $\dot{Q}$ , des dynamischen Drucks  $q$  und des Lastvielfachen  $n$  berücksichtigt. Nach ASTRUM [1, S. 52] dürfen die folgenden Maximalwerte nicht überschritten werden:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &\leq \dot{Q}_{Max} = 1600 \frac{kW}{m^2} \\ q &\leq q_{Max} = 17 \text{ kPa} \\ n &\leq n_{Max} = 15 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Diese drei Pfadbeschränkungen müssen zu jedem Zeitpunkt eingehalten werden, damit das Fahrzeug nicht verglüht oder andere Beschädigungen erfährt. Daher darf das Fahrzeug nicht zu schnell zu tief in die Atmosphäre eindringen, wie auch Abbildung 2.8 veranschaulicht. Die blaue Kurve in dieser Abbildung zeigt eine typische Lösung für die Bestimmung einer optimalen Bahn. Das Vorgehen zur numerischen Berechnung dieser Trajektorie wird in Kapitel 5 erläutert. Die drei grünen Kurven geben an, wie tief das Fahrzeug abhängig von seiner Geschwindigkeit fliegen dürfte, ohne jeweils eine der drei angesprochenen Beschränkungen zu verletzen. Diese wurden anhand der Gleichungen (2.4), (2.5) und (2.6) mit den angegebenen Maximalwerten berechnet. Man sieht, dass die Grenzen bei der typischen optimalen Bahn nie erreicht werden und die kritischste Phase für den dynamischen Druck und das Lastvielfache bei einer Geschwindigkeit von 3000 bis 4000  $\frac{m}{s}$  vorliegt. Der geringste Abstand zwischen der optimalen Lösung und der Kurve für die maximale Wärmeflussdichte ist

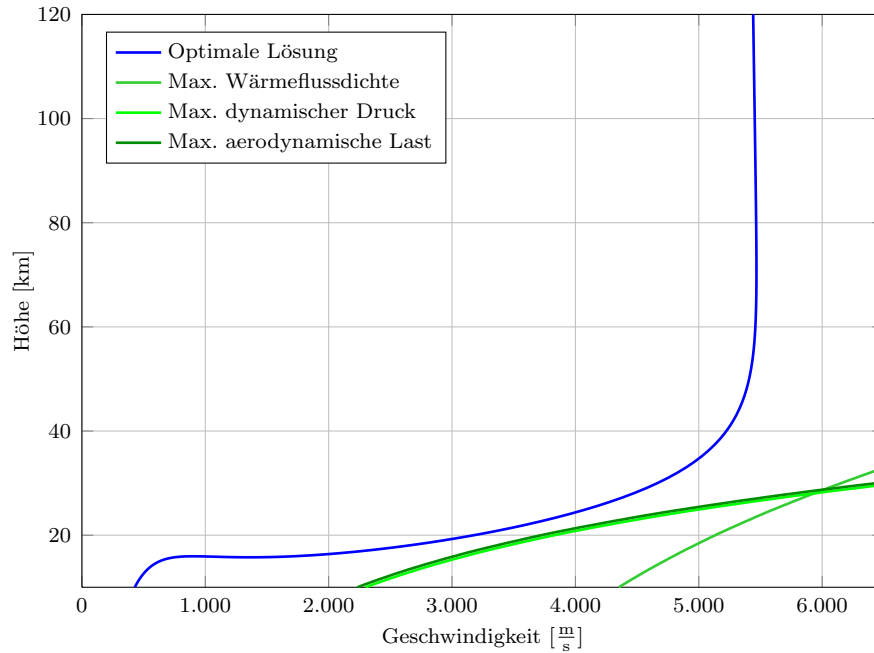


Abbildung 2.8: Korridor der zulässigen Trajektorien

noch deutlich höher und tritt bereits bei höheren Geschwindigkeiten auf. GRANT et al. [12, S. 7] haben einen unter anderem durch diese Beschränkungen definierten Eintrittskorridor untersucht. Die dort abgebildete Darstellung dieses Korridors ähnelt dem in Abbildung 2.8 dargestellten Resultat.

### 2.2.3 Flugdynamische Gleichungen

Die zur Modellierung notwendigen flugdynamischen Gleichungen sollen an dieser Stelle eingeführt werden. Eine ausführliche Herleitung findet man beispielsweise bei WEILAND [35, Kap. 6], jedoch wird hier der Bahnazimut  $\chi$  von Osten aus definiert. Dadurch weichen die dort angegebenen Differentialgleichungen leicht von den in dieser Arbeit verwendeten ab. Die Äquivalenz beider Modelle kann nachgewiesen werden (vgl. Anhang A.1).

Für die Bestimmung der flugdynamischen Gleichungen wird das Fahrzeug als Punktmasse in seinem Schwerpunkt angenommen. Die Positionskoordinaten  $h$ ,  $\lambda$  und  $\varphi$  werden durch kinematische Gleichungen beschrieben. Den Ausgangspunkt zur Herleitung dieser Gleichungen bildet die Beziehung

$$\left(\frac{d}{dt}\right) \vec{r} = \vec{V}. \quad (2.8)$$



Der Positionsvektor  $\vec{r}$  wird in der Regel im PCI-System (Index  $p$ ) und der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{V}$  im *Local-Geodatic*-System (Index  $g$ ) angegeben (vgl. Abbildung 2.5). Gleichung (2.8) wird im Folgenden im *Local-Geodatic*-System betrachtet, welches den Schwerpunkt des Fahrzeug als Mittelpunkt hat und durch die in Abbildung 2.5 eingezeichnete Ebene definiert ist. Die  $y$ - und  $z$ -Achse liegen in dieser Ebene, wobei die  $z$ -Achse Richtung Norden zeigt. Die  $x$ -Achse steht senkrecht auf der Ebene, sodass sich für den Positionsvektor die Darstellung

$$\vec{r}_g = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_g$$

ergibt. Nach WEILAND [35, S. 98] kann die zeitliche Ableitung des Positionsvektors durch

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \right)_p \vec{r}_p &= \left( \frac{d}{dt} \right)_g \vec{r}_g + \Omega_g \times \vec{r}_g \\ \text{mit } \Omega_g &= \begin{pmatrix} \dot{\lambda} \sin \varphi \\ -\dot{\varphi} \\ \dot{\lambda} \cos \varphi \end{pmatrix}_g \end{aligned}$$

in das *Local-Geodatic*-System transformiert werden. Somit ergibt sich für die linke Seite von Gleichung (2.8):

$$\left( \frac{d}{dt} \right)_p \vec{r}_p = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_g + \begin{pmatrix} \dot{\lambda} \sin \varphi \\ -\dot{\varphi} \\ \dot{\lambda} \cos \varphi \end{pmatrix}_g \times \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_g = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\lambda} r \cos \varphi \\ \dot{\varphi} r \end{pmatrix}_g$$

Für die rechte Seite, also die Darstellung des Geschwindigkeitsvektors im *Local-Geodatic*-System, gilt nach einfachen trigonometrischen Zusammenhängen aufgrund der Definition dieses Koordinatensystems:

$$\vec{V}_g = \begin{pmatrix} V \sin \gamma \\ V \cos \gamma \sin \chi \\ V \cos \gamma \cos \chi \end{pmatrix}_g$$

Gleichsetzen gemäß Gleichung (2.8) und Umformen führt auf:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= V \sin \gamma \\ \dot{\lambda} &= V \frac{\cos \gamma \sin \chi}{r \cos \varphi} \\ \dot{\varphi} &= V \frac{\cos \gamma \cos \chi}{r} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Für die dynamischen Gleichungen der Zustände, die die Geschwindigkeit und deren Richtung beschreiben ( $V$ ,  $\gamma$  und  $\chi$ ), bilden die Bewegungsgleichungen nach dem zweiten Newtonschen Gesetz die Grundlage. Auf eine Herleitung wird an dieser Stelle verzichtet. Diese kann beispielsweise WEILAND [35, Kap. 6] entnommen werden. Aufgrund der verschiedenen Koordinatensysteme müssen wiederum Transformationen angewandt werden. Bei der Transformation vom PCPF- ins PCI-System entstehen die Terme, die den Faktor  $\Omega$  bzw.  $\Omega^2$  enthalten. Da  $\Omega$  im Bereich von  $10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  liegt (vgl. Tabelle 2.3), werden diese Terme bei Vereinfachungen der Gleichungen oft vernachlässigt. Die vollständigen Gleichungen, wie sie in dieser Arbeit verwendet werden, lauten:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -\frac{D}{m} - g \sin \gamma + \Omega^2 r \cos \varphi (\sin \gamma \cos \varphi - \sin \varphi \cos \gamma \cos \chi) \\
 \dot{\gamma} &= \frac{L}{mV} \cos \beta + \left( \frac{V}{r} - \frac{g}{V} \right) \cos \gamma \\
 &\quad + 2\Omega \cos \varphi \sin \chi + \Omega^2 \frac{r}{V} \cos \varphi (\cos \gamma \cos \varphi - \sin \gamma \sin \varphi \cos \chi) \\
 \dot{\chi} &= \frac{L \sin \beta}{mV \cos \gamma} + \frac{V}{r} \cos \gamma \sin \chi \tan \varphi \\
 &\quad - 2\Omega (\tan \gamma \cos \varphi \cos \chi - \sin \varphi) + \Omega^2 \frac{r}{V \cos \gamma} \sin \varphi \cos \varphi \sin \chi
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Durch den Einfluss des Strömungswiderstands  $D$  und des Auftriebs  $L$  spielt auch die höhenabhängige Dichte der Atmosphäre bei den Gleichungen (2.10) eine Rolle. Die Geschwindigkeit geht quadratisch in die Gleichungen für  $D$  (2.2) und  $L$  (2.3) ein.

Ein typisches Eintrittsszenario wird bei ASTRIUM [1, S. 37] mit folgenden Anfangswerten angegeben:

$$\begin{aligned}
 h_0 &= 120 \text{ km} \\
 \lambda_0 &= 0^\circ \\
 \varphi_0 &= 25^\circ \\
 V_0 &= 5440,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 \gamma_0 &= -14,5^\circ \\
 \chi_0 &= 97,4^\circ
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Damit ist das physikalische Modell inklusive aller wichtiger Größen zur Beschreibung des Wiedereintrittsproblems dargelegt. In den folgenden beiden Kapiteln werden nun die mathematischen Verfahren, mit denen dieses Problem numerisch gelöst werden kann, vorgestellt.

# Kapitel 3

## Optimierung und optimale Steuerung

Mit dem in Kapitel 2 vorgestellten Modell soll die unter den gegebenen Voraussetzungen optimale Bahn berechnet werden. Wie sehr viele dynamische Prozesse in der Raumfahrt kann man auch das Wiedereintrittsproblem als *optimalen Steuerprozess* auffassen. Aus diesem Grund werden in diesem Kapitel die Grundlagen der optimalen Steuertheorie in Abschnitt 3.2 dargelegt. Eine Möglichkeit ein Optimalsteuerproblem zu lösen ist die Rückführung auf ein Optimierungsproblem. Daher wird in Abschnitt 3.1 zunächst eine Einführung in die nichtlineare Optimierung gegeben. Diese wird allerdings sehr kurz gehalten, da der Schwerpunkt dieser Arbeit auf der Anwendung der modellprädiktiven Regelung liegt. Ausführliche Erläuterungen zur Optimierung findet man beispielsweise bei NOCEDAL und WRIGHT [29] oder GEIGER und KANZOW [10].

### 3.1 Numerische Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme

Es gibt unterschiedliche Ansätze nichtlineare Optimierungsprobleme numerisch zu lösen. Einen umfassenden Überblick gibt es in den angesprochenen Büchern [29] und [10]. In diesem Abschnitt liegt der Fokus auf der *sequentiellen quadratischen Programmierung* (SQP), da dieses Verfahren zur Berechnung der in Kapitel 6 dargestellten Ergebnisse verwendet wird. Zunächst werden einige wichtige Begriffe und Definitionen der Optimierung eingeführt. Diese orientieren sich an den Ausführungen von BÜSKENS [7].

#### 3.1.1 Grundlagen der nichtlinearen Optimierung

Ein nichtlineares Optimierungsproblem kann im Allgemeinen wie folgt formuliert werden:

**Definition 3.1** (Nichtlineares Optimierungsproblem)

Die Funktionen  $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  und  $G : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  seien stetig differenzierbar. Die

Menge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  sei abgeschlossen, konvex und nichtleer. Da die Funktionen  $F$  und  $G$  sowohl linear als auch nichtlinear sein können, spricht man bei der Problemstellung

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} \quad & F(x) \\ \text{unter} \quad & G_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, \tilde{m}, \\ & G_i(x) = 0, \quad i = \tilde{m} + 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{3.1}$$

im Allgemeinen von einem nichtlinearen Optimierungsproblem (*NLP*, engl.: nonlinear programming).

Abweichend von der Standardnotation werden die Funktionen mit Großbuchstaben bezeichnet, um Verwechslungen mit den später verwendeten Funktionen  $f$  und  $g$  des optimalen Steuerproblems zu vermeiden. Der Index  $\tilde{m}$  unterteilt die Nebenbedingungen  $G$  in Ungleichungs- und Gleichungsnebenbedingungen. Ungleichungsnebenbedingungen können in  $x \in X$

- aktiv, d.h.  $G_i(x) = 0$  für  $i \in \{1, \dots, \tilde{m}\}$ , oder
- inaktiv, d.h.  $G_i(x) < 0$  für  $i \in \{1, \dots, \tilde{m}\}$ ,

sein. Um zwischen diesen Fällen unterscheiden zu können, wird die Indexmenge  $I$  eingeführt. Diese Menge enthält diejenigen Indizes, deren Ungleichungsnebenbedingungen für einen Punkt  $x \in X$  aktiv sind, d.h.

$$I(x) = \{i = 1, \dots, \tilde{m} \mid G_i(x) = 0\}.$$

Um Aussagen über mögliche Lösungen eines Optimierungsproblems treffen zu können, wird die *Lagrange-Funktion* eingeführt.

**Definition 3.2** (Lagrange-Funktion)

Die Funktion

$$L(x, \mu) = F(x) + \mu^T G(x) = F(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i G_i(x)$$

mit  $\mu \in \mathbb{R}^m$  heißt Lagrange-Funktion. Die Komponenten des Vektors  $\mu$  werden Lagrange-Multiplikatoren oder auch duale Variablen genannt.

Diese Funktion spielt zur Formulierung von *notwendigen Optimalitätsbedingungen* eine entscheidende Rolle. Solche Bedingungen wurden beispielsweise von KARUSH, KUHN und TUCKER hergeleitet. Zur Formulierung des Satzes wird folgende Definition benötigt:

**Definition 3.3** (Regularitätsbedingung der linearen Unabhängigkeit)

Die Regularitätsbedingung der linearen Unabhängigkeit (*LICQ*, engl.: linear independence constraint qualification) ist in  $x^*$  erfüllt, wenn folgende Bedingungen gelten:

- $x^* \in \text{int}(X)$  und
- die Gradienten  $\nabla G_i(x^*)$  mit  $i \in I(x^*) \cup \{\tilde{m} + 1, \dots, m\}$  sind linear unabhängig.

Nun können die nach KARUSH, KUHN und TUCKER benannten *KKT-Bedingungen* formuliert werden, die für ein Minimum des Problems (3.1) notwendigerweise erfüllt sein müssen.

**Satz 3.4** (KKT-Bedingungen)

Es sei  $x^*$  ein lokales Minimum des Optimierungsproblems (3.1), welches die Regularitätsbedingung der linearen Unabhängigkeit 3.3 erfüllt.

Dann existieren eindeutige Lagrange-Multiplikatoren  $\mu^* \in \mathbb{R}^m$ , sodass die folgenden Bedingungen gelten:

(i) Vorzeichenbedingung:

$$\mu_i^* \geq 0, \quad i = 1, \dots, \tilde{m}$$

(ii) Optimalitätsbedingung:

$$\nabla_x L(x^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i^* \nabla G_i(x^*) = 0$$

(iii) Komplementaritätsbedingung:

$$\mu_i^* G_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, \tilde{m}$$

(iv) Zulässigkeit:

$$\begin{aligned} x^* &\in X, \\ G_i(x^*) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, \tilde{m}, \\ G_i(x^*) &= 0, \quad i = \tilde{m} + 1, \dots, m \end{aligned}$$

Ein Punkt  $(x^*, \mu^*)$ , der die Bedingungen von Satz 3.4 erfüllt, heißt *KKT-Punkt*. KKT-Punkte spielen eine wichtige Rolle bei der numerischen Lösung von beschränkten Optimierungsproblemen.

Es sei noch angemerkt, dass es neben der Regularitätsbedingung der linearen Unabhängigkeit 3.3 weitere Regularitätsbedingungen gibt. Einige werden beispielsweise von BÜSKENS [7, S. 34f] vorgestellt. Alle Regularitätsbedingungen haben gemeinsam, dass sie eine Voraussetzung zum Beweis der KKT-Bedingungen 3.4 (oder einer abgeschwächten Form dieses Satzes) liefern.

Auf die Definition der notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung wird an dieser Stelle verzichtet, da der Schwerpunkt auf der Lösung

mit dem SQP-Verfahren liegt. Dieses Verfahren wird im nächsten Abschnitt näher erläutert.

### 3.1.2 Das SQP-Verfahren

Bei den Verfahren der sequentiellen quadratischen Programmierung (SQP) handelt es sich um „die vielleicht wichtigste Klasse von Verfahren zur Lösung von allgemeinen nichtlinearen Optimierungsproblemen“ (vgl. GEIGER und KANZOW [10, S.234]). Die Vorgehensweise soll im Folgenden kurz dargelegt werden. Eine ausführliche Herleitung und wichtige Eigenschaften des SQP-Verfahrens findet man beispielsweise bei GEIGER und KANZOW [10, Kap. 5.5].

Das nichtlineare Optimierungsproblem sei in Form von (3.1) mit  $X = \mathbb{R}^n$  gegeben. Wenn der aktuell untersuchte Punkt  $(x_k, \mu_k)$  kein KKT-Punkt nach Satz 3.4 ist, wird das NLP durch ein quadratisches Problem (QP)<sup>11</sup> approximiert. Als quadratisches Hilfsproblem um den Punkt  $(x^k, \mu^k)$  wird in der Literatur meist folgende Formulierung mit der Optimierungsvariablen  $d = x - x^k$  gewählt:

$$\begin{aligned} \min_d \quad & \frac{1}{2} d^T \nabla_{xx}^2 L(x^k, \mu^k) d + \nabla_x F(x^k)^T d \\ \text{unter} \quad & G_i(x^k) + \nabla_x G_i(x^k)^T d \leq 0, \quad i = 1, \dots, \tilde{m} \\ & G_i(x^k) + \nabla_x G_i(x^k)^T d = 0, \quad i = \tilde{m} + 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.2)$$

Andere Möglichkeiten das NLP quadratisch zu approximieren, werden von BOGGS und TOLLE [3, Kap. 2.2] betrachtet.

Die benötigte Hessematrix der Lagrangefunktion  $\nabla_{xx}^2 L(x^k, \mu^k)$  ist oft nicht explizit bekannt und muss numerisch approximiert werden, beispielsweise mittels dem Verfahren der finiten Differenzen. Eine andere Möglichkeit ist, die Hessematrix durch eine symmetrische und positiv definite Matrix zu ersetzen. Oft wird als Startschätzung die Einheitsmatrix verwendet. Diese Schätzung kann durch Update-Formeln wie dem *BFGS-Update* in jedem Schritt des SQP-Verfahrens aktualisiert werden. Eine wichtige Eigenschaft der BFGS-Formeln ist, dass die Symmetrie und die positive Definitheit der Matrix erhalten bleibt (vgl. BÜSKENS [7, S. 98]).

Um die Lösung  $d^k \in \mathbb{R}^n$  des quadratischen Hilfsproblems (3.2) numerisch zu bestimmen, wird ein geeignetes QP-Verfahren, wie beispielsweise das Innere-Punkte-Verfahren, verwendet. Wenn die Hessematrix (oder die Approximation) positiv definit ist, beschreibt  $d^k$  eine Abstiegsrichtung bezüglich der Lagrange-Funktion  $L(x^k, \mu^k)$  und wird in der nächsten Iteration als Suchrichtung verwendet.

---

<sup>11</sup>Als quadratisches Optimierungsproblem wird im Allgemeinen ein Optimierungsproblem bezeichnet, bei dem die zu minimierende Funktion quadratisch und die einzuhaltenden Nebenbedingungen linear sind.

Mit einer Aktualisierung des Zustands durch  $x^{k+1} = x^k + d^k$  kann jedoch nur lokale Konvergenz sichergestellt werden. Aus diesem Grund wird nach einer geeigneten Schrittweite  $\alpha_k$  gesucht, sodass durch ein Update der Form  $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$  auch globale Konvergenz erreicht werden kann. Eine mögliche Schrittweitenstrategie zur Bestimmung eines solchen  $\alpha_k$  ist die *Armijo-Regel*. Auf eine genaue Erläuterung wird an dieser Stelle verzichtet, diese kann zum Beispiel bei BÜSKENS [7, S. 54ff] nachgelesen werden.

Der folgende Algorithmus gibt abschließend einen Überblick der soeben erläuterten wichtigsten Schritte des SQP-Verfahrens:

**Algorithmus 3.5** (SQP-Algorithmus)

- (i) *Wahl einer Startschätzung  $(x^0, \mu^0)$  und gegebenenfalls einer Startschätzung der Hessematrix  $H^0$ , setze  $k = 0$ .*
- (ii) *Falls  $(x^k, \mu^k)$  ein KKT-Punkt ist: Beende den Algorithmus.*
- (iii) *Approximation des NLP durch ein QP in  $x^k$ , wobei die Hessematrix gegebenenfalls durch  $H^k$  ersetzt ist. Verwende die Lösung  $d^k$  als Abstiegsrichtung.*
- (iv) *Bestimme die Schrittweite  $\alpha_k$  beispielsweise mit Hilfe der Armijo-Regel.*
- (v) *Aktualisiere gegebenenfalls die Hessematrix  $H^k$  beispielsweise durch die BFGS-Update-Formel.*
- (vi) *Aktualisiere die Lösung  $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$ , setze  $k = k + 1$  und fahre mit (ii) fort.*

## 3.2 Optimale Steuerung

Mit Optimierungsproblemen können nur statische Prozesse wiedergespiegelt werden. Da es sich beim Wiedereintrittsproblem um einen dynamischen Prozess handelt, in dem die am Ende von Kapitel 2 erläuterten Differentialgleichungen eine wichtige Rolle spielen, führt dieses Problem auf einen *optimalen Steuerprozess*. Daher werden in Abschnitt 3.2.1 die Grundlagen der optimalen Steuertheorie erläutert und in Abschnitt 3.2.2 Lösungsverfahren vorgestellt. Die Erläuterungen orientieren sich an den Ausführungen von KNAUER [19]. Eine umfassende Übersicht der optimalen Steuerung findet man beispielsweise bei BRYSON und HO [6] oder IOFFE und TIHOMIROV [17].

### 3.2.1 Formulierung optimaler Steuerprozesse

Optimalen Steuerproblemen liegen in der Regel dynamische Prozesse zu Grunde. Es wird der Verlauf der Steuer- und Zustandsgrößen gesucht, der unter Einhalten des Systemverhaltens und der Nebenbedingungen hinsichtlich ausgewählter Kriterien

optimal ist. Um die Theorie von optimalen Steuerprozessen zu erläutern, müssen zunächst einige grundlegende Begriffe eingeführt werden.

**Definition 3.6** (Systemvariablen)

*Durch den zeitabhängigen Vektor*

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [t_0, t_f] \quad (3.3)$$

wird zu jedem Zeitpunkt der aktuelle Zustand des Prozesses bestimmt. Demnach heißt  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  Zustandsvektor zum Zeitpunkt  $t \in [t_0, t_f]$ . Seine Einträge  $x_i(t)$  für  $i = 1, \dots, n$  werden Zustandsvariablen oder kurz Zustände genannt. Zum Anfangszeitpunkt  $t_0$  heißt  $x(t_0)$  Anfangszustand und zum Endzeitpunkt  $t_f$  entsprechend  $x(t_f)$  Endzustand. Der Anfangszeitpunkt kann ohne Einschränkung zu  $t_0 = 0$  gesetzt werden, wohingegen der Endzeitpunkt  $t_f$  je nach Art des Problems entweder fest vorgegeben oder frei wählbar sein kann.

Das Systemverhalten lässt sich durch einen sogenannten Steuervektor beeinflussen. Dieser ist ebenfalls zeitabhängig und wird mit

$$u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [t_0, t_f] \quad (3.4)$$

bezeichnet. Seine einzelnen Komponenten  $u_i(t)$  mit  $i = 1, \dots, m$  heißen Steuervariablen oder kurz Steuerungen. Die Zustände und Steuerungen des Systems werden als Systemvariablen zusammengefasst.

Bei vielen Anwendungen wie auch beim Wiedereintrittsproblem müssen bei der Suche nach der optimalen Lösung Beschränkungen an die Zustände und die Steuerungen berücksichtigt werden.

**Definition 3.7** (Zustands- und Steuerbeschränkungen)

Mit einer hinreichend oft stetig differenzierbaren Funktion  $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^s$  können gemischte Zustands- und Steuerbeschränkungen durch

$$b(x(t), u(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

definiert werden.

Sind bestimmte Beschränkungen  $b_i$  mit  $i \in \{1, \dots, s\}$  nicht von der Steuerung abhängig, gilt also

$$b_i(x(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

mit  $b_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ , so handelt es sich um reine Zustandsbeschränkungen.

Analog werden Beschränkungen der Art

$$b_i(u(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$



mit  $i \in \{1, \dots, s\}$  und  $b_i : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$  als Steuerbeschränkungen bezeichnet. Diese treten oft als sogenannte Box-Beschränkungen der Form

$$u_{i_{Min}} \leq u_i(t) \leq u_{i_{Max}}, \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

für  $i = 1, \dots, m$  auf. In diesem Fall heißt die Menge

$$U = [u_{1,Min}, u_{1,Max}] \times \dots \times [u_{m,Min}, u_{m,Max}] \subset \mathbb{R}^m$$

auch Steuerbereich.

Auch für die eindimensionale Steuervariable des Wiedereintrittsproblems ist ein Steuerbereich vorgegeben. Zudem gibt es, wie in Kapitel 2 erläutert, für die Zustände ebenfalls Box-Beschränkungen. Sowohl diese als auch die dargelegten Pfadbeschränkungen (2.7) gehören zur Kategorie der reinen Zustandsbeschränkungen.

Neben den Beschränkungen muss eine zulässige Lösung des optimalen Steuerprozesses auch dem Systemverhalten des Problems genügen. Die zeitlichen Änderungen der Zustände werden durch Differentialgleichungen erster Ordnung berechnet.

**Definition 3.8** (Systemdynamik mit Randbedingungen)

Es sei  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0, t_f] \mapsto \mathbb{R}^n$  eine stetige und bezüglich  $x$  und  $u$  stetig partiell differenzierbare Funktion. Die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_f]$$

heißt Systemdynamik.

Häufig werden an den Anfangszustand  $x(t_0)$  und den Endzustand  $x(t_f)$  bestimmte Bedingungen gestellt. Diese werden in der bezüglich  $x(t_0)$  und  $x(t_f)$  stetig differenzierbaren Funktion der Randbedingungen  $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^r$  mit  $r \leq 2n$  zusammengefasst:

$$\psi(x(t_0), x(t_f)) = 0$$

In der Anwendung ist der Anfangszustand oft durch entsprechende Werte  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  vorgegeben, sodass sich Randbedingungen der Art

$$\psi(x(t_0), x(t_f)) = \begin{pmatrix} x(t_0) - x_0 \\ \hat{\psi}(x(t_f)) \end{pmatrix} = 0$$

mit  $\hat{\psi} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{\hat{r}}$ ,  $\hat{r} \leq n$  ergeben. Durch die Gleichungen (2.11) ist auch bei dem in dieser Arbeit untersuchten Wiedereintrittsproblem ein Anfangsszenario vorgegeben.

**Definition 3.9** (Zielfunktional)

Die Funktionen  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  und  $f_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0, t_f] \mapsto \mathbb{R}$  seien bezüglich aller Argumente stetig differenzierbar. Eine Funktion der Form

$$\Phi(x, u) = g(x(t_0), x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt$$

wird als Zielfunktional (oder auch Kostenfunktional) bezeichnet. Ziel der optimalen Steuerung ist es, das Zielfunktional zu minimieren.

Liegt das Zielfunktional in dieser Form vor, so wird der optimale Steuerprozess als *Bolza-Problem* bezeichnet. Gilt für die Endkosten  $g \equiv 0$ , so spricht man vom *Lagrange-Problem* und falls für die laufenden Kosten  $f_0 \equiv 0$  gilt, vom *Mayer-Problem*. Diese drei Darstellungen des optimalen Steuerproblems sind äquivalent. Insbesondere ist jedes Zielfunktionals in alle drei Darstellungen transformierbar (vgl. BÜSKENS [7, S. 128ff]).

Der optimale Steuerprozess beschreibt die Minimierung des Zielfunktionals unter Einhaltung der Zustands- und Steuerbeschränkungen sowie der Systemdynamik mit den gegebenen Randbedingungen. Gesucht werden die Steuervariablen, für die das Zielfunktional den minimalen Wert annimmt und der Ablauf des Prozess somit optimal hinsichtlich der berücksichtigten Kriterien ist. Mit den zuvor erläuterten Voraussetzungen lautet die kompakte Formulierung:

**Definition 3.10** (Optimaler Steuerprozess)

Das Problem

$$\begin{aligned} \min_{x, u} \quad & \Phi(x, u) = g(x(t_0), x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt \\ \text{unter} \quad & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ & \psi(x(t_0), x(t_f)) = 0, \\ & b(x(t), u(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \end{aligned} \tag{3.5}$$

heißt optimaler Steuerprozess oder auch optimales Steuerproblem.

Man nennt den Steuerprozess *autonom*, falls sowohl die Systemdynamik als auch das Zielfunktional nicht explizit von der Zeit abhängen (also  $f(x(t), u(t))$  und  $f_0(x(t), u(t))$  gilt). Es sei angemerkt, dass man jedes nichtautonome Problem in ein autonomes transformieren kann (vgl. BÜSKENS [7, S. 130]). Beim Wiedereintrittsproblem handelt es sich unter den gegebenen Annahmen um einen autonomen Steuerprozess.

### 3.2.2 Lösung durch direkte Verfahren

Zur Lösung optimaler Steuerprozesse gibt es zahlreiche numerische Verfahren, die sich in zwei Kategorien einteilen lassen: Direkte Verfahren und indirekte Verfahren. Bei Verwendung direkter Verfahren wird das unendlichdimensionale Optimalsteuerproblem durch eine Diskretisierung in ein endlichdimensionales nichtlineares Optimierungsproblem überführt. Das Optimierungsproblem kann dann mit entsprechenden Verfahren, wie dem in Abschnitt 3.1.2 vorgestellten SQP-Verfahren, gelöst werden.

Bei den indirekten Verfahren hingegen wird das Optimalsteuerungsproblem auf ein Randwertproblem zurückgeführt, welches dann mit geeigneten Verfahren gelöst werden kann. Dazu werden Aussagen über notwendige Bedingungen aus der optimalen Steuertheorie genutzt. Die optimale Steuertheorie soll in dieser Arbeit allerdings nicht näher betrachtet werden, da ein direktes Verfahren zur numerischen Lösung des Wiedereintrittsproblems eingesetzt wird. Für weitergehende theoretische Erläuterungen sei auf BRYSON und HO [6] oder BÜSKENS [7] verwiesen.

Im Folgenden wird das Prinzip der direkten Verfahren erläutert. Dabei stehen die später auf das Wiedereintrittsproblem angewandten Methoden im Vordergrund.

#### Diskretisierung

Zunächst muss das optimale Steuerproblem (3.5) zeitlich diskretisiert werden. Dazu werden  $p + 1$  Stützstellen  $t_k$  bestimmt. Für diese soll

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_p = t_f$$

gelten. Die Wahl von  $t_0 = 0$  stellt keine Einschränkung dar, da Probleme mit anderen Anfangszeitpunkten auf ein solches Problem transformiert werden können. Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich äquidistante Stützstellen  $t_k$  verwendet, das heißt

$$t_k = k \frac{t_f}{p}.$$

Im Folgenden sollen Approximationen an die Zustände  $x(t_k)$  und an die Steuerung  $u(t_k)$  durch

$$\begin{aligned} x^k &\approx x(t_k) \\ u^k &\approx u(t_k), \quad k = 0, \dots, p \end{aligned}$$

bezeichnet werden. Die Auswertung der Funktionen  $f$  und  $f_0$  an diesen Stellen wird durch

$$\begin{aligned} f^k &= f(x^k, u^k, t_k) \\ f_0^k &= f_0(x^k, u^k, t_k), \quad k = 0, \dots, p \end{aligned}$$

abgekürzt.

Mit diesen Kurzschreibweisen wird nun die Approximation des optimalen Steuerprozesses am Beispiel des Trapezverfahrens erläutert. Aufgrund der äquidistanten Stützstellen ist die Schrittweite  $h$  unabhängig von  $k \in \{0, \dots, p-1\}$  durch

$$h = t_{k+1} - t_k = \frac{t_f}{p}$$

gegeben. Die Systemdynamik kann mit dem Trapezverfahren durch

$$x^{k+1} = x^k + \frac{h}{2}(f_k + f_{k+1}), \quad k = 0, \dots, p-1$$

approximiert werden.

Neben der Systemdynamik muss auch der Lagrange-Term im Zielfunktional, falls vorhanden, approximiert werden. Bei Anwendung des Trapezverfahrens gilt

$$\int_0^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt \approx \sum_{k=0}^{p-1} \frac{h}{2}(f_0^k + f_0^{k+1}).$$

Als Alternative zu dieser Approximation des Zielfunctionals kann das Bolza- oder Lagrange-Problem auch in ein Mayer-Problem transformiert werden, sodass der Integralterm entfällt.

Nach einer vollständigen Diskretisierung lässt sich das zu lösende Problem 3.10 somit folgendermaßen formulieren:

$$\begin{aligned} \min_{x, u} \quad & g(x^0, x^p) + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{h}{2}(f_0^k + f_0^{k+1}) \\ \text{unter} \quad & x^{k+1} = x^k + \frac{h}{2}(f^k + f^{k+1}), \quad k = 0, \dots, p-1, \\ & \psi(x^0, x^p) = 0, \\ & b(x^k, u^k) \leq 0, \quad k = 0, \dots, p \end{aligned}$$

Selbstverständlich können zur Approximation der Systemdynamik und des Zielfunctionals auch Verfahren höherer Ordnung, wie das *Hermite-Simpson-Verfahren*, angewandt werden. Dadurch ergeben sich entsprechend mehr Funktionsauswertungen für  $f$  und  $f_0$ , die in der Regel zu einem genaueren Ergebnis führen.

## Lösen des Optimierungsproblems

Das diskretisierte Problem lässt sich durch die Einführung des Vektors

$$z := (x_0, \dots, x_p, u_0, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^{(n+m)(p+1)}$$

als nichtlineares Optimierungsproblem auffassen:

$$\begin{aligned} \min_z \quad & F(z) = g(x^0, x^p) + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{h}{2} (f_0^k + f_0^{k+1}) \\ \text{unter} \quad & \begin{pmatrix} G_1(z) \\ \vdots \\ G_{(p+1)s}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(x^0, u^0) \\ \vdots \\ b(x^p, u^p) \end{pmatrix} \leq 0, \\ & \begin{pmatrix} G_{(p+1)s+1}(z) \\ \vdots \\ G_{(p+1)s+pn+r-1}(z) \\ G_{(p+1)s+pn+r}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^1 + x^0 + \frac{h}{2}(f^0 + f^1) \\ \vdots \\ -x^p + x^{p-1} + \frac{h}{2}(f^{p-1} + f^p) \\ \psi(x^0, x^p) \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dabei bezeichnet  $s$  die Anzahl an Zustands- und Steuerbeschränkungen und  $r$  die Anzahl an Randbedingungen des Problems. Bei einem Problem mit beispielsweise zwölf Systemvariablen, welche alle an Beschränkungen geknüpft seien, kann es durch eine Diskretisierung mit 100 Stützstellen schon zu einem Problem mit über 3000 Nebenbedingungen kommen. Bei feinerer Diskretisierung steigt die Anzahl der Nebenbedingungen linear an.

Die Optimierungssoftware *WORHP* (engl.: *We Optimize Really Huge Problems*) wurde speziell für das Lösen sehr großer Optimierungsprobleme entwickelt. Die Grundlage von *WORHP* bildet der in Abschnitt 3.1.2 erläuterte SQP-Algorithmus. Zur Diskretisierung eines optimalen Steuerproblems steht die Schnittstelle *TransWORHP* zur Verfügung. Dabei kann zwischen dem Trapezverfahren und dem Hermite-Simpson-Verfahren gewählt werden.

## Approximation der Zustands- und Steuervariablen

Durch Lösen des diskretisierten Optimierungsproblems steht der Lösungsvektor  $z^*$  nur an den ausgewählten Stützstellen  $t_k$  für  $k = 0, \dots, p$  zur Verfügung.

Bei Anwendung des Trapez-Verfahrens liefert eine stückweise lineare Interpolation zwischen den Stützstellen eine schnelle und hinreichend genaue Lösung. Der stetige Verlauf der optimalen Steuerung wird in diesem Fall durch

$$u^*(t) = u^{*,k} + \frac{t - t_k}{h} (u^{*,k+1} - u^{*,k}), \quad \text{für } t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, \dots, p-1$$

bestimmt. Bei Anwendung des Trapezverfahrens zur Approximation der Systemdynamik und des Zielfunktional kann auch mit einem Verfahren höherer Ordnung keine bessere Fehlerordnung garantiert werden.

Die Lösung des nichtlinearen Optimierungsproblems (3.6) beinhaltet neben der optimalen Steuerung  $u^{*,k}$  mit  $k = 0, \dots, p$  auch die optimale Lösung für die Zustände  $x^{*,k}$  mit  $k = 0, \dots, p$ . Für einen stetigen Verlauf der Zustandsvariablen kann ebenfalls zwischen den Stützstellen stückweise linear interpoliert werden:

$$x^*(t) = x^{*,k} + \frac{t - t_k}{h} (x^{*,k+1} - x^{*,k}), \quad \text{für } t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, \dots, p-1 \quad (3.7)$$

Um bei der modellprädiktiven Regelung möglichst exakte Zustände als Ausgangspunkt verwenden zu können, wird die Flugbahn durch Integration der optimalen Steuerung berechnet. Dazu wird in der Regel ein Verfahren höherer Ordnung als zur Approximation der Systemdynamik und des Zielfunktional verwendet. Für die Integration der Systemdynamik bietet das vierstufige Runge-Kutta-Verfahren einen guten Kompromiss zwischen numerischem Aufwand und resultierender Genauigkeit. Bei linearer Interpolation der Steuerung ergibt sich mit

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \frac{h}{6} (f_A + 2(f_B + f_C) + f_D), \quad k = 0, \dots, p-1 \\ \text{mit } f_A &= f(x^k, u^{*,k}), \\ f_B &= f\left(x^k + \frac{h}{2}f_A, \frac{1}{2}(u^{*,k} + u^{*,k+1})\right), \\ f_C &= f\left(x^k + \frac{h}{2}f_B, \frac{1}{2}(u^{*,k} + u^{*,k+1})\right), \\ f_D &= f(x^k + hf_C, u^{*,k+1}) \end{aligned}$$

ein Verfahren der Ordnung  $\mathcal{O}(h^4)$ . Dabei gilt für die Schrittweite bei äquidistanten Stützstellen weiterhin  $h = \frac{t_f}{p}$ . Um eine stetige Lösung zu erhalten, kann wiederum zwischen den berechneten Werten an den Stützstellen stückweise linear interpoliert werden (vgl. Gleichung (3.7)).

Dieses Kapitel stellt die notwendige Theorie zur Verfügung, um ein optimales Steuerproblem numerisch zu lösen. Dabei liegt der Schwerpunkt stark auf den Verfahren, mit denen die numerischen Lösungen des Wiedereintrittproblems in dieser Arbeit berechnet wurden. Weiterführende Informationen auch zu anderen Lösungsverfahren findet man beispielsweise bei BRYSON und HO [6] oder bei BÜSKENS [7].

# Kapitel 4

## Nichtlineare modellprädiktive Regelung

In diesem Kapitel wird die Idee der modellprädiktiven Regelung (MPC, engl.: *model predictive control*) erläutert. Es handelt sich dabei um ein Verfahren, dass sich besonders zur Regelung von beschränkten Prozessen eignet. Die lineare MPC hat bereits in vielen Anwendungsbereichen Einzug gefunden (vgl. FINDEISEN und ALLGÖWER [9]). Allerdings sind die wenigsten physikalischen Prozesse von Natur aus linear und eine Linearisierung bringt immer Ungenauigkeiten mit sich. Um diesem Problem entgegenzuwirken, wird seit den 1990er Jahren auch an der nichtlinearen MPC geforscht. In diesem Kapitel wird die Vorgehensweise bei der modellprädiktiven Regelung sowie charakteristische Eigenschaften des Verfahrens dargelegt. Umfassende Informationen zur nichtlinearen MPC findet man beispielsweise bei GRÜNE und PANNEK [15].

### 4.1 Optimale Regelung

Bevor das Verfahren der modellprädiktiven Regelung erläutert wird, wird in diesem Abschnitt angelehnt an die Ausführungen von BÜSKENS [7] eine kurze Einführung in die allgemeine optimale Regelung gegeben. Viele dynamische Systeme realer Prozesse erlauben die Möglichkeit der Einflussnahme auf das System. Oft soll diese Einflussnahme den Prozess so gut wie möglich, also unter gewissen Aspekten optimal, regeln. Abbildung 4.1 verdeutlicht den Unterschied einer solchen Regelung im Vergleich zur Steuerung, deren mathematische Beschreibung in Abschnitt 3.2 dargelegt wurde.

Bei der Steuerung werden im Vorhinein mit Hilfe eines Modells des Prozesses die Steuervariablen  $u(t)$  so bestimmt, dass der berechnete Ist-Zustand  $x(t)$  dem Soll-Zustand  $x_{ref}(t)$  möglichst gut entspricht (vgl. Abbildung 4.1). Wird zudem versucht, bestimmte Kriterien zu optimieren, wie beispielsweise die Prozesszeit oder die benötigte Energie, spricht man von optimaler Steuerung. Da die Steuerung aber a priori berechnet wird, kann auf zu diesem Zeitpunkt unbekannte Störungen kein Einfluss genommen werden. In den Wirkungsablauf kann also zur Prozesszeit nicht mehr eingegriffen wer-

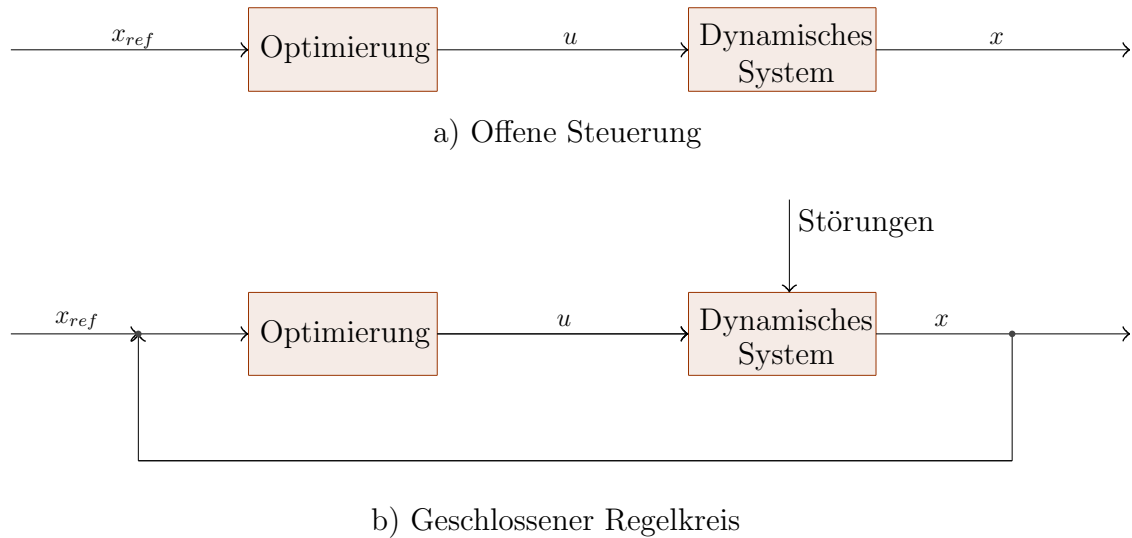


Abbildung 4.1: Vergleich von Steuerung und Regelung, schematisch dargestellt

den. Aus diesem Grund wird dieses Prinzip auch als offene Steuerung (engl.: *open loop control*) bezeichnet.

Im Gegensatz dazu findet bei der Regelung ein wiederholter Vergleich zwischen dem Ist-Zustand  $x(t)$  und dem Soll-Zustand  $x_{ref}(t)$  statt (vgl. Abbildung 4.1). Die Stellvariablen  $u(t)$  werden wiederum anhand eines Modells des Prozesses bestimmt, um den Unterschied zwischen Ist- und Soll-Zustand zu verkleinern. Allerdings können sie ständig durch aktuelle Messwerte verändert werden. Analog zur optimalen Steuerung spricht man von optimaler Regelung, wenn die Steuergrößen  $u(t)$  so gewählt werden, dass bestimmte Aspekte des Prozesses optimiert werden. Durch die Berücksichtigung aktueller Messwerte kann somit auch auf vorher unbekannte Störungen reagiert werden. Es entsteht ein geschlossener Regelkreis (engl.: *closed loop control*).

Bei der mathematischen Beschreibung der Regelung ist es das Ziel, ein sogenanntes Regelgesetz zu definieren, dass die optimalen Stellvariablen  $u^*$  in Abhängigkeit der aktuellen Zustände und der Prozesszeit bestimmt:

$$u^*(t) = u^*(x(t), t) \quad (4.1)$$

Der zu regelnde Prozess lasse sich durch ein autonomes Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ \text{mit } x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

beschreiben. Insbesondere kann die rechte Seite  $f$  nichtlinear sein.

Wenn sich der Zustand des Systems ohne den Einfluss von Störungen nicht mehr ändert, befindet es sich in Ruhe. Mathematisch wird dies folgendermaßen definiert:



**Definition 4.1** (Ruhelage)

Als Ruhelage oder Gleichgewicht wird die Lösung der Gleichung

$$x_R = f(x_R, u_R)$$

bezeichnet.

Jede Ruhelage lässt sich in eine Stabilisierung des Ursprungs mit

$$0 = f(0, 0)$$

transformieren. Dazu werden die Zustände durch  $\tilde{x} = x - x_R$  und die Steuerungen entsprechend durch  $\tilde{u} = u - u_R$  ersetzt (vgl. BÜSKENS [7, S. 180f]).

Um zu untersuchen, ob ein dynamisches System gegen einen Gleichgewichtszustand konvergiert, kann also ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Ursprung als Ruhelage angenommen werden. Für diese Untersuchungen muss zunächst der Begriff der Stabilität geklärt werden.

**Definition 4.2** (Stabilität)

Sei  $x_R$  die Ruhelage eines Systems (4.2).

(i) Die Ruhelage  $x_R$  heißt stabil, falls es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, sodass

$$\|x(t, x_0) - x_R\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

für alle Anfangswerte  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x_0 - x_R\| \leq \delta$  gilt.

(ii) Die Ruhelage  $x_R$  heißt asymptotisch stabil, falls sie stabil ist und es zudem für jedes  $\delta > 0$  und jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\tilde{t} > 0$  gibt, sodass

$$\|x(t, x_0) - x_R\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq \tilde{t}$$

für alle Anfangswerte  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x_0 - x_R\| \leq \delta$  gilt.

Die Stabilitätsbegriffe orientieren sich an der Definition von BÜSKENS [7, Def. 5.2] und werden in Abschnitt 4.3 für Aussagen zu verschiedenen Formulierungen beim MPC-Verfahren benötigt.

## 4.2 Idee des MPC-Verfahrens

Die Beschreibung des Prinzips der modellprädiktiven Regelung in diesem Abschnitt orientiert sich an dem Paper von FINDEISEN und ALLGÖWER [9] und den Ausführungen von GRAICHEN [11].

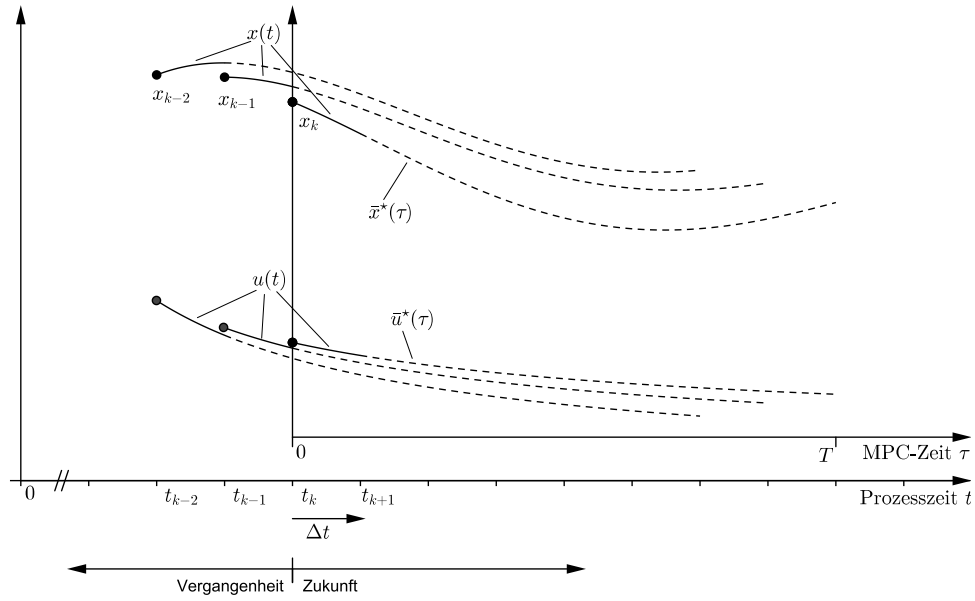


Abbildung 4.2: Schematische Veranschaulichung der Idee des MPC-Verfahrens

Im Allgemeinen wird bei Anwendung eines MPC-Verfahrens wiederholt ein optimaler Steuerprozess auf einem endlichen Zeithorizont unter Einhaltung der Systemdynamik und möglichen Zustands- und Steuerbeschränkungen gelöst. Es wird zwischen der tatsächlichen Prozesszeit  $t \in \mathbb{R}$  und der MPC-Zeit  $\tau \in [0, T]$  unterschieden (vgl. Abbildung 4.2). Dabei bezeichnet  $T$  den sogenannten *Prädiktionshorizont*. Zum aktuellen Zeitpunkt  $t_k$  gilt für die MPC-Zeit  $\tau_0 = 0$ . Basierend auf Messwerten  $x_k$  zu diesem Zeitpunkt wird das zukünftige dynamische Verhalten des Systems über dem Prädiktionshorizont  $T$  vorhergesagt. Die Steuerung  $\bar{u}^*(\tau)$  wird für  $\tau \in [0, T]$  so bestimmt, dass der vorhergesagte Wert des Zielfunktional minimal wird. Die vorhergesagten Verläufe der Zustände und der Steuerung werden in Abbildung 4.2 jeweils gestrichelt dargestellt.

Wenn es keine Störungen gäbe und das Modell das Systemverhalten exakt abbilden würde und zudem der optimale Steuerprozess auf einem unendlichem Zeithorizont gelöst werden könnte, wäre die zum Zeitpunkt  $t_k$  berechnete Steuerung  $\bar{u}^*(\tau)$  für den gesamten zukünftigen Prozess mit  $t \geq t_k$  optimal. Die Lösung eines optimalen Steuerproblems auf einem unendlichem Zeithorizont kann allerdings numerisch nur approximiert werden. Zudem treten im Allgemeinen bei dynamischen Prozessen häufig Störungen oder Modellunsicherheiten auf, sodass das vorhergesagte Systemverhalten  $\bar{x}^*(\tau)$  für  $\tau \in [0, T]$  nicht der realen Entwicklung entspricht. Deshalb wird die berechnete Steuerung  $\bar{u}^*(\tau)$  nur für die Rechendauer eines MPC-Schrittes angenommen und

anschließend mit aktuellen Messwerten neu bestimmt. Um die Berechnungen zu vereinfachen, wird vorausgesetzt, dass die Rechenzeit eines MPC-Schrittes konstant ist und zum Zeitpunkt einer neuen Iteration jeweils aktuelle Messwerte zur Verfügung stehen. Die Dauer einer MPC-Iteration wird mit  $\Delta t$  bezeichnet.

Mit den neuen Messwerten  $x_{k+1}$  zum Zeitpunkt  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$  wird das Vorgehen (Vorhersage anhand der Systemdynamik und Lösung des optimalen Steuerprozesses) wiederholt. Dadurch entsteht eine neue Steuerung auf dem um  $\Delta t$  verschobenen Zeithorizont für  $\tau \in [0, T]$  (vgl. Abbildung 4.2).

## 4.3 Mathematische Formulierung

Für theoretische Aussagen bei der modellprädiktiven Regelung werden einige Voraussetzungen unter anderem an die Mengen, in der die Zustände und Steuerungen liegen, gefordert. Diese sind in der Realität oft nicht erfüllt oder können nicht überprüft werden. Die Anwendbarkeit des MPC-Verfahrens wird in diesen Fällen durch numerische Untersuchungen erwiesen. Nichtsdestotrotz werden im folgenden gewisse Annahmen an das Problem gestellt, um anschließend Aussagen über die Stabilität des Prozesses machen zu können.

Die Zustände  $x(t)$  und Steuerungen  $u(t)$  des zu regelnden Systems (4.2) seien durch die Mengen  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  bzw.  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  beschränkt:

$$x(t) \in X, \quad u(t) \in U(x), \quad \forall t \geq 0$$

Dabei seien  $X$  und  $U(x)$  konvex und  $U(x)$  zudem kompakt. Außerdem gelte  $(0, 0) \in X \times U$ . Durch die Abhängigkeit des Steuerbereichs von den Zuständen können nicht nur reine Zustands- und Steuerbeschränkungen, sondern wie bei der optimalen Steuerung auch gemischte Beschränkungen berücksichtigt werden. Die Beschränkungen werden in diesem Fall in Form von Mengen angegeben, da diese für die Stabilität der modellprädiktiven Regelung von Bedeutung sind.

Weiterhin sei die rechte Seite des Differentialgleichungssystems (4.2)  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar und erfülle  $f(0, 0) = 0$ . Wie in Abschnitt 4.1 erläutert, stellt diese Forderung keine Einschränkung des Problems dar.

In jedem MPC-Schritt wird ein optimales Steuerproblem gelöst, um die optimale Steuerung anhand aktueller Messwerte

$$x_k = x(t_k)$$

zu bestimmen. Um die durch die Systemdynamik (4.2) vorhergesagten Zustände von den Messwerten unterscheiden zu können, werden diese mit  $\bar{x}(\tau)$  bezeichnet. Analog kennzeichnet  $\bar{u}(\tau)$  modellinterne Steuergrößen. Diese sind jeweils auf dem aktuellen

Prädiktionshorizont für  $\tau \in [0, T]$  definiert. Der zum Zeitpunkt  $t_k$  zu lösende optimale Steuerprozess kann mit dieser Notation folgendermaßen formuliert werden:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{u}} \quad & \Phi_T(x_k, \bar{u}) = g(\bar{x}(T)) + \int_0^T f_0(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) \, d\tau \\ \text{unter} \quad & \dot{\bar{x}}(\tau) = f(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)), \\ & \bar{x}(0) = x_k, \quad \bar{x}(T) \in S, \\ & \bar{x}(\tau) \in X, \quad \bar{u}(\tau) \in U, \quad \tau \in [0, T] \end{aligned} \tag{4.3}$$

Wie in Kapitel 3 können durch die Funktion  $g$  Endkosten und durch  $f_0$  laufende Kosten, beispielsweise in Form einer Referenztrajektorie, berücksichtigt werden. Die Anfangsbedingungen werden durch aktuelle Messwerte konkret vorgegeben. Zudem spielen die Endbedingungen bei der modellprädiktiven Regelung eine wichtige Rolle, worauf in den folgenden Abschnitten genauer eingegangen wird. Deshalb wird die Menge  $S \subseteq X$  mit  $0 \in S$  für die Endbedingungen eingeführt.

Für die Betrachtung des MPC-Algorithmus wird vorausgesetzt, dass der optimale Steuerprozess (4.3) lösbar ist. Die berechnete optimale Steuerung  $\bar{u}^*(\tau)$  wird für die Zeit bis zum nächsten Messwert angenommen:

$$u(t_k + \tau) = \bar{u}^*(x_k, \tau), \quad \forall \tau \in [0, \Delta t) \tag{4.4}$$

Für den Verlauf der Zustände gilt dementsprechend:

$$x(t_k + \tau) = \bar{x}^*(x_k, \tau), \quad \forall \tau \in [0, \Delta t)$$

Zum nächsten Zeitpunkt  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$  wird das Problem (4.3) erneut mit den Startzuständen  $x_{k+1}$  minimiert. Der Verlauf von  $u(t)$  und  $x(t)$  setzt sich für die Zeit bis zur nächsten MPC-Iteration mit den neu berechneten optimalen Lösungen  $\bar{u}^*(\tau)$  und  $\bar{x}^*(\tau)$  fort. Bei fortlaufender Prozesszeit  $t \in \mathbb{R}$  ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t_k + \tau) = \bar{u}^*(x_k, \tau) \\ x(t) &= x(t_k + \tau) = \bar{x}^*(x_k, \tau) \end{aligned}, \quad \forall \tau \in [0, \Delta t), \quad k \in \mathbb{N}_0^+$$

Die Definition von  $u(t)$  entspricht somit einem Regelgesetz der Form (4.1). Wenn der Prozess störfrei ist und keine Unsicherheiten in der Systemdynamik vorliegen, entsprechen die neuen Startzustände  $x_{k+1}$  der Lösung aus der vorherigen MPC-Iteration:

$$x_{k+1} = \bar{x}^*(x_k, \tau + \Delta t)$$

In diesem Fall ist der resultierende optimale Verlauf der Zustände  $x(t)$  stetig. Da in der Praxis die neuen Messwerte aber zumeist von der berechneten Vorhersage abweichen, ergeben sich Unstetigkeiten zu den Zeitpunkten  $t_k$  (vgl. Abbildung 4.2).

Analog kann der Verlauf der Steuerung ebenfalls Unstetigkeitsstellen enthalten, falls auch dieser Wert gemessen wird und nicht die Lösung der letzten Iteration verwendet wird.

Es stellt sich die Frage unter welchen Voraussetzungen für das MPC-Verfahren Stabilität im Sinne von Definition 4.2 gezeigt werden kann. Eine wichtige Rolle spielen dabei die Länge des Zeithorizonts und mögliche Endbedingungen. Aus diesem Grund stehen diese Aspekte im Fokus der folgenden Erläuterungen.

### 4.3.1 Unendlicher Zeithorizont

Die Betrachtung des unendlichen Zeithorizonts, also  $T \rightarrow \infty$ , ist für theoretische Aussagen der modellprädiktiven Regelung von großer Bedeutung. Die Vorgabe von Endbedingungen und auch die Betrachtung von Endzuständen im Zielfunktional in Form der Funktion  $g(\bar{x}(T))$  ist in diesem Fall nicht sinnvoll. Stattdessen kann beispielsweise eine Referenztrajektorie durch die Funktion  $f_0$  im Zielfunktional berücksichtigt werden. Wenn der Abstand zur Referenztrajektorie beispielsweise in Form einer quadratischen Funktion  $f_0$  definiert wird, hat das Zielfunktional nur einen endlichen Wert, falls  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} f_0(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) = 0$  gilt. Für ein Minimum des optimalen Steuerprozesses werden die gewünschten Endzustände somit trotzdem angenommen.

Zum Zeitpunkt  $t_k$  kann man das zu lösende optimale Steuerproblem mit unendlichem Zeithorizont demnach durch

$$\begin{aligned} \min_{\bar{u}} \quad & \Phi_{\infty}(x_k, \bar{u}) = \int_0^{\infty} f_0(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) \, d\tau \\ \text{unter} \quad & \dot{\bar{x}}(\tau) = f(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)), \\ & \bar{x}(0) = x_k, \\ & \bar{x}(\tau) \in X, \quad \bar{u}(\tau) \in U, \quad \tau \in [0, \infty) \end{aligned} \tag{4.5}$$

beschreiben. Es gilt folgender Satz:

**Satz 4.3** (MPC mit unendlichem Zeithorizont)

*Es sei die Menge  $\Gamma \subseteq X$  aller Anfangsbedingungen  $x_k$ , für die der optimale Steuerprozess mit unendlichem Zeithorizont (4.5) lösbar ist, nichtleer. Dann ist der Ursprung des Systems (4.2) asymptotisch stabil.*

Diese Aussage folgt aus dem Optimalitätsprinzip von BELLMANN (vgl. GRAICHEN [11, Satz 7.1]).

Da die Lösung eines optimalen Steuerprozesses mit unendlichem Zeithorizont aber numerisch nur approximiert werden kann, liegt der Fokus in dieser Arbeit auf endlichen Zeithorizonten. Zudem kann dadurch Rechenzeit gespart werden.

### 4.3.2 Endlicher Zeithorizont

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, um trotz eines verkürzten Zeithorizonts  $T < \infty$  Stabilität zu gewährleisten. Eine Variante ist, Endbedingungen der Form  $\bar{x}(T) = 0$  einzuführen. In diesem Fall lautet das resultierende Optimalsteuerungsproblem:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{u}} \quad & \Phi_T(x_k, \bar{u}) = \int_0^T f_0(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) \, d\tau \\ \text{unter} \quad & \dot{\bar{x}}(\tau) = f(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)), \\ & \bar{x}(0) = x_k, \quad \bar{x}(T) = 0 \\ & \bar{x}(\tau) \in X, \quad \bar{u}(\tau) \in U, \quad \tau \in [0, T] \end{aligned} \tag{4.6}$$

Mit dieser Formulierung gilt analog zu Satz 4.3:

**Satz 4.4** (MPC mit endlichem Zeithorizont und Endbedingungen)

*Es sei die Menge  $\Gamma \subseteq X$  aller Anfangsbedingungen  $x_k$ , für die der optimale Steuerprozess mit Endbedingungen (4.6) lösbar ist, nichtleer. Dann ist der Ursprung des Systems (4.2) asymptotisch stabil.*

Dieser Satz wird ebenfalls bei GRAICHEN [11, Satz 7.2] bewiesen. Allerdings kann die Menge  $\Gamma$  vor allem bei kurzen Zeithorizonten sehr klein sein. Dies führt dazu, dass bei etwaigen Störungen oft keine Lösung gefunden werden kann. Da das Ausgleichen von Störungen aber eine wichtige Eigenschaft von Regelungsverfahren ist, wird nach alternativen Formulierungen gesucht.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Forderung der Endbedingung  $\bar{x}(T) = 0$  durch die Definition einer Endregion  $S_\varepsilon \subseteq X$ , in der die Endzustände liegen sollen, abzuschwächen. Damit  $\bar{x}(T) = 0$  weiterhin erfüllt sein kann, wird  $0 \in S_\varepsilon$  gefordert. Zudem werden die Endbedingungen durch die Funktion  $g(\bar{x}(T))$  wieder im Zielfunktional berücksichtigt:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{u}} \quad & \Phi_T(x_k, \bar{u}) = g(\bar{x}(T)) + \int_0^T f_0(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) \, d\tau \\ \text{unter} \quad & \dot{\bar{x}}(\tau) = f(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)), \\ & \bar{x}(0) = x_k, \quad \bar{x}(T) \in S_\varepsilon \\ & \bar{x}(\tau) \in X, \quad \bar{u}(\tau) \in U, \quad \tau \in [0, T] \end{aligned} \tag{4.7}$$

Mit zusätzlichen Voraussetzungen an die Endregion  $S_\varepsilon$  kann wiederum asymptotische Stabilität gezeigt werden:

**Satz 4.5** (MPC mit endlichem Zeithorizont und Endregion)

*Es sei die Menge  $\Gamma \subseteq X$  aller Anfangsbedingungen  $x_k$ , für die der optimale Steuer-*

prozess mit Endregion (4.7) lösbar ist, nichtleer. Zudem sei die Menge der Endregion  $S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq \varepsilon\} \subseteq \Gamma$  mit  $\varepsilon > 0$  kompakt und nichtleer und es existiere ein Regelgesetz  $q(x) \in U(x) \forall x \in S_\varepsilon$ , sodass

$$\frac{\partial g}{\partial x} f(x, q(x)) + f_0(x, q(x)) \leq 0 \quad \forall x \in S_\varepsilon \quad (4.8)$$

gilt. Dann ist der Ursprung des Systems (4.2) asymptotisch stabil.

Die Ungleichung (4.8) wird auch als *Control-Lyapunov-Ungleichung* bezeichnet und eine Funktion  $g(x)$ , die diese erfüllt als *Control-Lyapunov-Funktion*. Einen Beweis des Satzes findet man wiederum bei GRAICHEN [11, Satz 7.3]. Durch die Ersetzung der Endbedingung  $\bar{x}(T) = 0$  durch die Endregion  $S_\varepsilon$  ist die Menge der Anfangswerte, für die der optimale Steuerprozess (4.7) lösbar ist, deutlich größer geworden. Dadurch können auch auftretende Störungen besser beherrscht werden.

Es stellt sich jedoch die Frage, wie groß diese Menge  $S_\varepsilon$  in der Praxis sein kann. Um für möglichst viele Fälle Lösungen zu finden, wäre  $S_\varepsilon = X$  wünschenswert. Das bedeutet die Endzustände unterliegen lediglich den permanent geltenden Zustandsbeschränkungen. Dadurch erhält man ein optimales Steuerproblem mit freiem Endzustand:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{u}} \quad & \Phi_T(x_k, \bar{u}) = g(\bar{x}(T)) + \int_0^T f_0(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) \, d\tau \\ \text{unter} \quad & \dot{\bar{x}}(\tau) = f(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)), \\ & \bar{x}(0) = x_k, \\ & \bar{x}(\tau) \in X, \quad \bar{u}(\tau) \in U, \quad \tau \in [0, T] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Auch mit dieser Formulierung gilt ähnlich wie im Fall der Endregion:

**Satz 4.6** (MPC mit endlichem Zeithorizont und freiem Endzustand)

Es sei die Menge  $\Gamma \subseteq X$  aller Anfangsbedingungen  $x_k$ , für die der optimale Steuerprozess mit freiem Endzustand (4.9) lösbar ist, nichtleer. Zudem existiere eine kompakte nichtleere Menge  $S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq \varepsilon\} \subseteq \Gamma$  mit  $\varepsilon > 0$  und ein Regelgesetz  $q(x) \in U(x) \forall x \in S_\varepsilon$ , sodass

$$\frac{\partial g}{\partial x} f(x, q(x)) + f_0(x, q(x)) \leq 0 \quad \forall x \in S_\varepsilon \quad (4.10)$$

gilt. Dann ist der Ursprung des Systems (4.2) asymptotisch stabil.

Obwohl im optimalen Steuerproblem (4.9) keine expliziten Forderungen an den Endzustand gestellt werden, ist die asymptotische Stabilität wiederum von der Existenz

einer Endregion  $S_\varepsilon$  abhängig. Für einen Beweis sei auf GRAICHEN [11, Satz 7.4] verwiesen. Dort wird auch gezeigt, dass die Einzugsmenge  $\Gamma$  unter gewissen zusätzlichen Bedingungen an  $f_0$  und  $g$  genauer bestimmt werden kann. Insbesondere wird dabei deutlich, dass sich  $\Gamma$  bei einem längeren Zeithorizont  $T$  vergrößert. Die Menge an lösbaren Problemen und besonders an beherrschbaren Störfällen kann demnach durch die Wahl des Zeithorizonts beeinflusst werden (vgl. GRAICHEN [11, S. 149]).

### 4.3.3 Länge des Zeithorizonts

Auf der einen Seite erhöht ein längerer Zeithorizont die Stabilität des Problems, auf der anderen Seite aber auch die benötigte Rechenzeit. Demnach stellt sich bei einer konkreten Anwendung die Frage, wie lang der Zeithorizont gewählt werden sollte.

Auch zu dieser Frage, gibt es bei GRAICHEN [11] und auch bei GRÜNE und PANNEK [15] Aussagen, die sich auch beweisen lassen. Allerdings sind die Voraussetzungen in der Praxis meist nicht überprüfbar. Eine gute Wahl der Länge des Zeithorizonts ist insbesondere sehr problemspezifisch. Dies wird vor allem an einem einfachen von GRÜNE und PANNEK [15] intensiv untersuchten Beispiel klar.

#### Beispiel 4.7

*Es wird ein Fahrzeug betrachtet, dass auf einer ellipsenförmigen Straße von einem Start- an einen Zielpunkt fahren soll (vgl. Abbildung 4.3). Die Zustände  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  beschreiben die Position des Fahrzeugs. Durch die Definition der Menge*

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \right\| = 1 \right\}$$

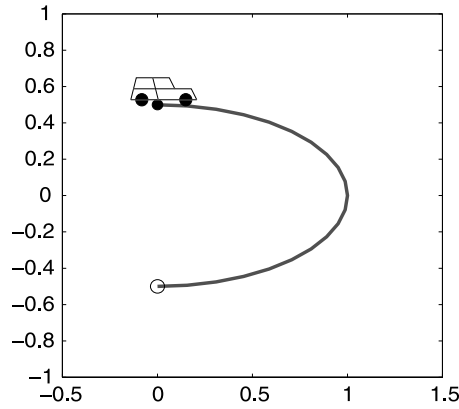
*wird sichergestellt, dass sich das Fahrzeug nur auf der Ellipse bewegen kann. Die Systemdynamik wird durch*

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\nu(x) + u) \\ \frac{\cos(\nu(x) + u)}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \nu(x) = \begin{cases} \arccos(2x_2), & \text{falls } x \geq 0 \\ 2\pi - \arccos(2x_2), & \text{sonst} \end{cases}$$

*beschrieben. Durch  $u \in U = [0, 0.2]$  wird zudem vorgegeben, dass sich das Fahrzeug nur im Uhrzeigersinn bewegen kann. Der Startwert wird durch  $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  und der*



Abbildung 4.3: Veranschaulichung von Beispiel 4.7<sup>12</sup>

zu erreichende Endwert durch  $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  bestimmt (vgl. Abbildung 4.3). Mit dem Zielfunktional

$$\Phi(x, u) = \|x - x^*\|^2 + u^2$$

soll der Abstand zum Zielpunkt  $x^*$  minimiert werden.

Numerische Simulationen dieses Beispiels zeigen, dass bei einem Zeithorizont von  $T = 11$  asymptotische Stabilität von  $x^*$  erreicht wird, für  $T \leq 10$  jedoch nicht (vgl. GRÜNE und PANNEK [15, Beispiel 6.26]). Die Ursache kann man gut anhand von Abbildung 4.3 nachvollziehen. Um den Zielpunkt zu erreichen, muss sich das Auto zunächst weiter von diesem entfernen. Dadurch steigt der Wert des Zielfunktional an. Erst nach dem Durchfahren der Kurve wird dieser Wert wieder geringer. Wenn der Zeithorizont nun so kurz ist, dass der Regler das Abnehmen des Zielfunktional noch nicht vorhersagen kann, ist es die beste Lösung am Startpunkt stehenzubleiben. Dort sind die Kosten des Zielfunktional geringer als im Bereich vor der Kurve. Für einen Zeithorizont von  $T \leq 10$  kann man genau dieses Verhalten beobachten.

Dieses Beispiel zeigt, dass eine gute Wahl für die Länge des Zeithorizonts stark vom betrachteten Problem abhängig ist. Vor allem bei komplexen dynamischen Prozessen kann diese Wahl nur durch numerische Untersuchungen bestimmt werden. GRÜNE und PANNEK [15] zeigen weiterhin, dass durch eine Gewichtung im Zielfunktional bei Beispiel 4.7 bereits für  $T = 2$  asymptotische Stabilität erreicht werden kann. Diese Gewichtung wird ebenfalls experimentell festgelegt.

<sup>12</sup>Bildnachweis: GRÜNE und PANNEK [15, S. 136]

# Kapitel 5

## Optimierung der Wiedereintrittstrajektorie

Im Folgenden wird aufgezeigt, wie das in Kapitel 2 erläuterte Problem mit den in den letzten beiden Kapiteln vorgestellten mathematischen Verfahren gelöst werden kann. Das Wiedereintrittsproblem wird vorerst als optimaler Steuerprozess aufgefasst. Die Beschreibung der Umsetzung erfolgt in Abschnitt 5.1 und dient als Vorbereitung für anschließende Untersuchungen mit dem MPC-Verfahren. Die Realisierung des Problems mit diesem Regelungsverfahren wird in Abschnitt 5.2 beschrieben. Es werden zwei verschiedene Ansätze zur Formulierung des Zielfunktional verwendet: Zum Einen die Bestrafung verletzter Endbedingungen durch Endkosten und zum Anderen die Vorgabe einer Referenztrajektorie. Im Anschluss an dieses Kapitel werden die numerischen Resultate vorgestellt.

### 5.1 Betrachtung als optimaler Steuerprozess

Zunächst wird die Bahnplanung eines Wiedereintrittmanövers mit Hilfe der Theorie der optimalen Steuerung (vgl. Kapitel 3) erläutert. Die verwendeten Variablen und Funktionen werden definiert und die betrachteten Zielfunktionale vorgestellt. Anschließend wird die Vorgehensweise zur numerischen Lösung des Problems dargelegt.

#### 5.1.1 Problemformulierung

Wie in Abschnitt 3.2.1 beschrieben setzt sich ein optimaler Steuerprozess aus den Systemvariablen, für die Beschränkungen gelten können, der Systemdynamik mit Randbedingungen und dem Zielfunktional zusammen. Im Folgenden werden diese charakteristischen Elemente der optimalen Steuertheorie für den Fall des Wiedereintrittproblems bestimmt.

## Systemvariablen

Mit der Beschreibung des physikalischen Modells in Kapitel 2 wurden bereits die wichtigsten Zustände eingeführt (vgl. Tabelle 2.2). Der Rollwinkel  $\beta$  ist bei diesem Problem die einzige Größe, mit der das Fahrzeug gesteuert werden kann. Zur Berechnung der optimalen Trajektorie wird als Steuergröße jedoch nicht direkt dieser Winkel, sondern seine Beschleunigung, also die zweite Ableitung von  $\beta$  nach der Zeit, betrachtet. Die Geschwindigkeit des Rollwinkels  $\omega$  und dessen Beschleunigung  $\eta$  werden als zusätzliche Systemvariablen über

$$\begin{aligned}\dot{\beta}(t) &= \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) &= \eta(t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

mit den Anfangswerten

$$\begin{aligned}\beta_0 &= 0 \\ \omega_0 &= 0\end{aligned}\tag{5.2}$$

eingeführt. Die Variable  $\eta(t)$  wird als Steuergröße festgelegt, sodass  $\beta(t)$  und  $\omega(t)$  als weitere Zustände betrachtet werden. Dadurch können neben dem Rollwinkel auch dessen Geschwindigkeit und Beschleunigung beschränkt werden. Zudem wird der Verlauf des Rollwinkels deutlich glatter.

Die Systemvariablen des optimalen Steuerproblems werden demnach durch den Zustandsvektor

$$x(t) = (h(t), \lambda(t), \varphi(t), V(t), \gamma(t), \chi(t), \beta(t), \omega(t))^T\tag{5.3}$$

und die eindimensionale Steuervariable

$$u(t) = \eta(t)\tag{5.4}$$

beschrieben. Die Komponenten von  $x(t) \in \mathbb{R}^8$  seien stückweise stetig differenzierbar und  $u(t) \in \mathbb{R}$  stückweise stetig.

Als Anfangszeit wird der Zeitpunkt des Wiedereintritts auf  $t_0 = 0$  gesetzt. Die Endzeit  $t_f$  ist frei. Zu erwarten ist für die betrachtete Phase des Wiedereintritts eine Dauer von etwa vier Minuten (vgl. Abschnitt 2.1). Um keine zusätzliche Einschränkung an das Problem zu stellen, wird die maximal zulässige Zeit für die Endzeit  $t_f$  bei den numerischen Berechnungen auf 50 min gesetzt.

## Zustands-, Steuer- und Pfadbeschränkungen

Die Zustandsbeschränkungen der verschiedenen Winkel basieren auf den geometrisch bedingten Definitionsbereichen, welche für Längen- und Breitengrad, Bahnneigungswinkel und Bahnazimut bereits in Tabelle 2.2 aufgeführt sind. Die Höhe und die

Geschwindigkeit sind nur nach unten beschränkt. Für die Höhe über der Marsoberfläche sind negative Werte nicht sinnvoll und die Geschwindigkeit muss aufgrund der Definition des Differentialgleichungssystems ungleich null sein. Da in der betrachteten Phase nur Werte im Bereich von mehreren  $100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  erwartet werden, bringt eine untere Schranke von  $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  keine physikalischen Einschränkungen, jedoch mathematische Wohldefiniertheit der Systemdynamik mit sich. Für den Rollwinkel und dessen soeben definierte Geschwindigkeit und Beschleunigung gelten folgende Grenzen:

$$\begin{aligned} -170^\circ &\leq \beta(t) \leq 170^\circ \\ -10^\circ \frac{1}{\text{s}} &\leq \omega(t) \leq 10^\circ \frac{1}{\text{s}} \\ -2^\circ \frac{1}{\text{s}^2} &\leq \eta(t) \leq 2^\circ \frac{1}{\text{s}^2} \end{aligned} \quad \forall t \in [0, t_f]$$

Diese Beschränkungen ergeben sich aus technischen Voraussetzungen und sind in diesem Fall empirisch bestimmt worden.

Die Zustandsbeschränkungen gehen als  $x_{i,Min}$  mit  $i = 1, \dots, 8$  bzw.  $x_{j,Max}$  mit  $j = 2, 3, 5, \dots, 8$  und die Steuerbeschränkungen als  $u_{Min}$  bzw.  $u_{Max}$  in die Funktion  $b$  der Beschränkungen ein. Zudem werden die in Abschnitt 2.2.2 definierten Pfadbeschränkungen  $\dot{Q}_{Max}$ ,  $q_{Max}$  und  $n_{Max}$  berücksichtigt:

$$b(x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} x_{i,Min} - x_i(t) \\ x_j(t) - x_{j,Max} \\ u_{Min} - u(t) \\ u(t) - u_{Max} \\ \dot{Q}(t) - \dot{Q}_{Max} \\ q(t) - q_{Max} \\ n(t) - n_{Max} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, 8 \\ j = 2, 3, 5, \dots, 8 \end{matrix}, \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (5.5)$$

Es handelt sich also um gemischte Steuer- und Zustandsbeschränkungen  $b : \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{19}$ . Eine Übersicht der verwendeten Werte liefert Tabelle 5.1. Die kursiv dargestellten Zahlen gehen nicht als Beschränkungen ein, sondern werden nur für die Skalierung verwendet, welche in Abschnitt 5.1.3 erläutert wird.

## Systemdynamik mit Randbedingungen

Einen wichtigen Bestandteil des optimalen Steuerprozesses stellt die Systemdynamik dar. Es gilt

$$\dot{x}(t) = \left( \dot{h}(t), \dot{\lambda}(t), \dot{\varphi}(t), \dot{V}(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\chi}(t), \dot{\beta}(t), \dot{w}(t) \right)^T = f(x(t), u(t)), \quad (5.6)$$

Variable	Beschreibung	Einh.	Beschränkung	Anf.w.	Endw.	
$x(t) =$	$\begin{pmatrix} h(t) \\ \lambda(t) \\ \varphi(t) \\ V(t) \\ \gamma(t) \\ \chi(t) \\ \beta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$	Höhe	km	$[0, 150]$	120	$\geq 10$
		geogr. Länge	°	$[-180, 180]$	0	<i>frei</i>
		geogr. Breite	°	$[-90, 90]$	25	<i>frei</i>
		Geschwindigkeit	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$[1, 10\,000]$	5440,8	$\leq 1,9\,c(h_f)$
		Bahnneigungsw.	°	$[-90, 90]$	-14,5	<i>frei</i>
		Bahnazimut	°	$[-180, 180]$	97,4	<i>frei</i>
		Rollwinkel	°	$[-170, 170]$	0	<i>frei</i>
		Geschw. Rollw.	$\circ \frac{1}{\text{s}}$	$[-10,10]$	0	<i>frei</i>
$u(t) =$	$\begin{pmatrix} e(t) \\ \eta(t) \\ \dot{Q}(t) \\ q(t) \\ n(t) \end{pmatrix}$	Steuerenergie	$(\circ)^2 \frac{1}{\text{s}^3}$	$[0, 1]$	0	<i>frei</i>
		Beschl. Rollw.	$\circ \frac{1}{\text{s}^2}$	$[-2, 2]$	0	<i>frei</i>
		Wärmefluss	$\frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$	$[0, 1600]$	0	<i>frei</i>
		Dyn. Druck	kPa	$[0, 17]$	0	<i>frei</i>
		Lastvielfaches	-	$[0, 15]$	0	<i>frei</i>

Tabelle 5.1: Übersicht aller Variablen des optimalen Steuerprozesses

wobei  $f$  durch die rechten Seiten der Differentialgleichungen (2.9), (2.10) und (5.1) gegeben ist, die an dieser Stelle der Übersicht halber nicht wiederholt werden. Aus der Definition der Differentialgleichungen folgt die stetige Differenzierbarkeit der Komponenten von  $f : \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^8$ .

Die Randbedingungen werden in eine Funktion für die Anfangsbedingungen  $\psi_{anf} : \mathbb{R}^8 \mapsto \mathbb{R}^8$  und eine Funktion für die Endbedingungen  $\psi_{end} : \mathbb{R}^8 \mapsto \mathbb{R}^2$  unterteilt. Dadurch werden Gleichungs- und Ungleichungsbedingungen getrennt. Für das Wiedereintrittsproblem werden die Anfangswerte aller Zustände (vgl. Gleichungen (2.11) und (5.2)) sowie die zu erreichenden Endzustände vorgegeben. Wie in Kapitel 2 erläutert, soll das Fahrzeug während der Wiedereintrittsphase soweit abgebremst werden, dass in einer Höhe von mindestens 10 km die Geschwindigkeit noch höchstens das 1,9-fache der Schallgeschwindigkeit  $c(h)$  beträgt. Dementsprechend wird für die Endzustände  $h_f = h(t_f)$  und  $V_f = V(t_f)$  gefordert:

$$\begin{aligned} h_f &\geq h_{f,Min} = 10 \text{ km} \\ V_f &\leq V_{f,Max} = 1,9\,c(h_f) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Somit resultieren für die Endbedingungen die Ungleichungen

$$\psi_{end}(x(t_f)) = \begin{pmatrix} h_{f,Min} - h_f \\ V_f - V_{f,Max} \end{pmatrix} \leq 0.$$

Die Anfangsbedingungen sind durch die Gleichungen

$$\psi_{anf,i}(x(0)) = (x_i(0) - x_{i,0}) = 0, \quad i = 1, \dots, 8 \quad (5.8)$$

gegeben. Die Endwerte der übrigen Zustände sind frei. Alle Anfangs- und Endwerte sind in Tabelle 5.1 zusammenfassend aufgeführt.

### 5.1.2 Wahl des Zielfunktional

In diesem Abschnitt wird erläutert, welche Zielfunktionale im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden. Unter der Voraussetzung, dass die Endbedingungen eingehalten werden, soll ein bestimmter Landepunkt angesteuert werden.

#### Maximierung der Seitenreichweite

Es soll eine Trajektorie zum Erreichen der Endbedingungen  $h_f$  und  $V_f$  berechnet werden. Dabei wird zunächst die zurückgelegte Strecke maximiert und die dafür aufgebraachte Steuerenergie minimiert. Die Distanz, die nach Norden oder Süden maximal erreicht werden kann, wird im Folgenden als Seitenreichweite bezeichnet. Durch die berechnete Flugbahn erhält man einen ersten Eindruck einer möglichen optimalen Lösung. Zudem wird die errechnete maximal erreichbare geographische Breite genutzt, um anschließend einen möglichen Landeplatz zu bestimmen. Das Zielfunktional  $\Phi_{ocp1} : \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R} \times [0, t_f] \mapsto \mathbb{R}$  wird wie folgt definiert:

$$\Phi_{ocp1}(x(0), x(t_f), u(t)) = -w_\varphi (\varphi(0) - \varphi(t_f))^2 + w_\eta \int_0^{t_f} \eta^2(t) dt \quad (5.9)$$

Mit den Gewichtungsfaktoren  $w_\varphi, w_\eta \in [0, 1]$ , wobei  $w_\varphi + w_\eta = 1$  gilt, kann das Verhältnis zwischen der Minimierung der Energie und der Maximierung der Seitenreichweite reguliert werden. Typischerweise gilt  $w_\eta \ll w_\varphi$ . Nach Definition 3.9 gilt

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8 &\mapsto \mathbb{R} \text{ mit } g(x(0), x(t_f)) = -w_\varphi (\varphi(0) - \varphi(t_f))^2 \\ \text{und } f_0 : \mathbb{R} \times [0, t_f] &\mapsto \mathbb{R} \text{ mit } f_0(u(t)) = w_\eta \eta^2(t). \end{aligned}$$

Für beide Funktionen ist die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit erfüllt.

Nach Abschnitt 3.2.1 handelt es sich bei Gleichung (5.9) um ein Zielfunktional in Bolza-Form. Dieses wird zunächst in Mayer-Form transformiert, sodass der Integralterm eliminiert wird. Dadurch werden zusätzliche numerische Berechnungen zur Approximation des Integrals vermieden.

Für die Durchführung dieser Transformation wird ein zusätzlicher Zustand  $e(t)$  für  $t \in [0, t_f]$  eingeführt:

$$e(t) = \int_0^t \eta^2(\tau) d\tau$$

Entsprechend folgt:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \eta^2(t) \\ \text{mit } e(0) &= \int_0^0 \eta^2(\tau) d\tau = 0 \end{aligned}$$

Da durch den Term  $e(t)$  im Zielfunktional betragsmäßig große Werte der Steuervariablen bestraft werden, wird dieser Zustand im Folgenden als Steuerenergie bezeichnet. Der Zustandsvektor (5.3) sowie die Systemdynamik (5.6) mit den Anfangsbedingungen (5.8) erweitern sich um die entsprechenden Terme von  $e$ . Folglich gilt nun  $x \in \mathbb{R}^9$  und damit  $f : \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^9$  und  $\psi_{anf} : \mathbb{R}^9 \mapsto \mathbb{R}^9$ . Die Dimension des Vektors der Beschränkungen  $b$  ändert sich nicht, da die Steuerenergie unbeschränkt ist (vgl. Tabelle 5.1).

Das in Mayer-Form transformierte Zielfunktional  $\Phi_{ocp_1} : \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}^9 \mapsto \mathbb{R}$  lautet

$$\Phi_{ocp_1}(x(0), x(t_f)) = -w_\varphi (\varphi(0) - \varphi(t_f))^2 + w_e e(t_f),$$

wobei der Faktor  $w_e \in [0, 1]$  den in Gleichung (5.9) eingeführten Faktor  $w_\eta$  ersetzt. Da der Integralterm eliminiert wurde, gilt nun  $f_0 \equiv 0$ .

### Steuerung zu einem ausgewählten Landepunkt

In der Anwendung ist eine möglichst geringe Abweichung von einem konkreten Landepunkt interessanter als die Maximierung der Seitenreichweite. Um einen geeigneten Landeplatz zu finden, der unter den gegebenen Bedingungen gut erreichbar ist, wird die mit dem Zielfunktional  $\Phi_{ocp_1}$  berechnete maximale Seitenreichweite  $\varphi^*(t_f)$  verwendet. Die im Folgenden zu erreichende geographische Breite  $\tilde{\varphi}$  soll in einer Entfernung von 75 % der maximalen Reichweite liegen:

$$\tilde{\varphi} = \varphi(0) - 0,75 |\varphi(0) - \varphi^*(t_f)| \quad (5.10)$$

Um eine dazu passende geographische Länge zu ermitteln, wird ein optimales Steuerproblem mit dem Zielfunktional  $\Phi_{ocp_2} : \mathbb{R}^9 \mapsto \mathbb{R}$  mit

$$\Phi_{ocp_2}(x(t_f)) = w_\varphi (\tilde{\varphi} - \varphi(t_f))^2 + w_e e(t_f) \quad (5.11)$$

gelöst. Es wird also versucht möglichst nah am Breitengrad  $\tilde{\varphi}$  zu landen, während der Endwert für die geographische Länge  $\lambda(t_f)$  frei ist. Die so berechnete geographische Länge sei  $\tilde{\lambda}$  und stellt den gesuchten zugehörigen Längengrad dar.

Der gewünschte Landepunkt wird anschließend durch  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$  festgelegt. Das Zielfunktional  $\Phi_{ocp_3} : \mathbb{R}^9 \mapsto \mathbb{R}$  wird so gewählt, dass der Abstand zu diesem Punkt minimiert wird:

$$\Phi_{ocp_3}(x(t_f)) = w_{entf} \sqrt{(\tilde{\varphi} - \varphi(t_f))^2 + (\tilde{\lambda} - \lambda(t_f))^2} + w_e e(t_f) \quad (5.12)$$

Mit dem Faktor  $w_{entf} \in [0, 1]$  kann die Abweichung im Vergleich zur Steuerenergie gewichtet werden, sodass  $w_{entf} + w_e = 1$  gilt. Auch für dieses Zielfunktional ist die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit außer im Punkt  $\varphi(t_f) = \tilde{\varphi}$  und  $\lambda(t_f) = \tilde{\lambda}$  erfüllt.

Aus diesen drei Zielfunktionalen ergeben sich unterschiedliche Steuerprozesse. In allen Fällen ist die Erfüllung der Endbedingungen (5.7) Voraussetzung für eine Lösung des Optimalsteuerproblems.

### 5.1.3 Numerische Bestimmung der Lösung

Für jedes Zielfunktional  $\Phi_{ocp_i}$ ,  $i \in [1, 3]$  ist durch

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \Phi_{ocp_i}(x(0), x(t_f)) & i \in [1, 3] \\ \text{unter} \quad & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \\ & \psi_{anf}(x(0)) = 0, \\ & \psi_{end}(x(t_f)) \leq 0, \\ & b(x(t), u(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, t_f] \end{aligned} \quad (5.13)$$

mit den Funktionen  $f$ ,  $\psi_{anf}$ ,  $\psi_{end}$  und  $b$  ein optimaler Steuerprozess definiert. Tabelle 5.1 gibt einen Überblick über die zugehörigen Variablen mit deren Beschränkungen sowie Anfangs- und Endbedingungen. Kursiv geschriebene Werte gehen nicht als Beschränkungen in das optimale Steuerproblem ein, sondern kommen lediglich bei der Skalierung zum Tragen.



## Skalierung

Wie in Tabelle 5.1 anhand der Beschränkungen erkennbar ist, liegen die Definitionsbereiche der Variablen in unterschiedlichen Größenordnungen. Da die numerischen Berechnungen in SI-Einheiten durchgeführt werden, weist die Höhe mit 10 000 bis 120 000 m die höchsten Werte auf, wohingegen die Steuerenergie etwa im Bereich von  $0,001 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^3}$  liegt. Dadurch haben bei der Minimierung des Zielfunktional bestimmten Variablen einen größeren Einfluss als andere. Um diesem Problem vorzubeugen, werden vor der Lösung des optimalen Steuerprozesses alle Systemvariablen sowie die Pfadbeschränkungen skaliert.

Im Rahmen dieser Arbeit wird eine lineare und eine affine Variante der Skalierung jeweils auf verschiedenen Bereichen untersucht. Numerische Testfälle haben ergeben, dass für das betrachtete Problem eine lineare Skalierung auf das Intervall  $[-100, 100]$  gute Ergebnisse liefert (vgl. Anhang Tabelle A.1). Der Skalierungsfaktor wird aus dem betragsmäßig größten Wert des jeweiligen Definitionsbereiches (bzw. der in Tabelle 5.1 kursiv dargestellten Ergänzung) berechnet:

$$x_{skal} = \frac{100}{\max(|x_{Min}|, |x_{Max}|)}$$

Mit diesem Faktor werden alle Werte multipliziert, sodass anschließend die Werte aller Zustände im Intervall  $[-100, 100]$  liegen. Für die Steuergröße und die Pfadbeschränkungen wird analog vorgegangen. Ein Vorteil dieser Skalierung gegenüber der affinen Variante ist, dass sich das Vorzeichen der Werte nicht ändert. Einen Vorzeichenwechsel müsste man ansonsten beispielsweise im Zielfunktional wieder rückgängig machen.

BETTS [2, Kap. 4.8] schlägt weitere Alternativen zur Skalierung der Variablen eines optimalen Steuerprozesses vor. Beispielsweise kann die Struktur der Jacobi-Matrix berücksichtigt werden, um das anschließende Lösen des Optimierungsproblems zu vereinfachen. Es wird jedoch darauf hingewiesen, dass keine Skalierung für alle Arten von Problemen erfolgreich ist.

## Numerische Simulation

Abbildung 5.1 verdeutlicht schematisch die Vorgehensweise zur numerischen Berechnung der optimalen Bahn. Zur Lösung des Problems ist eine Startschätzung notwendig. Bei der Höhe und der Geschwindigkeit wird zwischen Anfangs- und Endwert linear interpoliert und bei den übrigen Variablen der konstante Anfangswert als Startschätzung verwendet. So ist im Vorfeld keine Kenntnis der Lösung notwendig.

Aus der Startschätzung, der Systemdynamik mit den Randbedingungen, den Zustands-, Steuer- und Pfadbeschränkungen sowie dem zu minimierenden Zielfunktional wird zunächst der optimale Steuerprozess (5.13) formuliert. Anschließend erfolgt

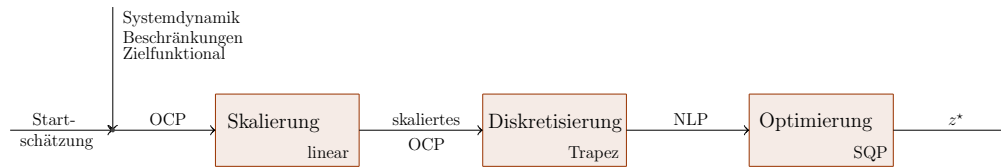


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung der Berechnung der optimalen Steuerung

die Skalierung der Variablen. Das skalierte unendlich dimensionale Optimalsteuerungsproblem wird mit dem Trapez-Verfahren (vgl. Abschnitt 3.2.2) diskretisiert und das resultierende nichtlineare endlich dimensionale Optimierungsproblem mit dem SQP-Verfahren (vgl. Abschnitt 3.1.2) gelöst. Dazu wird die Optimierungssoftware *WORHP* und deren Schnittstelle für optimale Steuerprozesse *TransWORHP* verwendet. Die berechnete Lösung  $z^*$  enthält sowohl die optimale Steuerung  $u^*$  als auch die Zustände  $x^*$ , die die berechnete optimale Bahn des Wiedereintrittproblems beschreiben. Die Resultate der numerischen Berechnungen werden in Abschnitt 6.1 vorgestellt und analysiert.

Bei dieser Vorgehensweise, also der Lösung des gesamten optimalen Steuerprozesses, kann nicht auf etwaige Störungen und Modellfehler reagiert werden. Die berechnete optimale Flugbahn kann jedoch bei der modellprädiktiven Regelung als Referenztrajektorie verwendet werden. Zudem wurde durch diese vorab durchgeführte Rechnung die Anwendbarkeit der verwendeten Optimierungssoftware *WORHP* verifiziert, die verschiedenen Optimierungsparameter problemspezifisch eingestellt sowie Gewichte im Zielfunktional untersucht. Im Wesentlichen dient das Lösen des optimalen Steuerprozesses als Vorbereitung für die anschließende Anwendung eines MPC-Verfahrens.

## 5.2 Betrachtung als MPC-Problem

Bisher wurde von einem störungsfreien Flug während der Wiedereintrittsphase ausgegangen. Da dies in der Realität sehr unwahrscheinlich ist, soll der Schwerpunkt der numerischen Untersuchungen nicht auf der Lösung des reinen Steuerproblems liegen, sondern auf der Anwendung eines Regelverfahrens. In dieser Arbeit wird das in Kapitel 4 vorgestellte MPC-Verfahren angewandt. Bei der modellprädiktiven Regelung wird das optimale Steuerproblem wiederholt gelöst und in jedem Iterationsschritt aktuelle Messwerte sowie Informationen aus der letzten Iteration einbezogen. Um Rechenzeit zu sparen, wird der optimale Steuerprozess auf einem verkürzten Zeithorizont betrachtet. Diese Einschränkung kann allerdings dazu führen, dass das Problem unter den geforderten Endbedingungen nicht mehr lösbar ist. Aus diesem Grund wird das optimale Steuerproblem umformuliert.

### 5.2.1 Problemformulierung

Die Systemvariablen des Steuerprozesses entsprechen den Vektoren  $x(t) \in \mathbb{R}^9$  und  $u(t) \in \mathbb{R}$  aus den Gleichungen (5.3) und (5.4). Analog zu Kapitel 4 werden die innerhalb des Modells berechneten Zustände mit  $\bar{x}(\tau)$  und die Steuerungen mit  $\bar{u}(\tau)$  bezeichnet. Sie sind jeweils nur auf dem aktuellen Prädiktionshorizont  $[0, T]$  definiert. Mit  $T \in \mathbb{R}_{>0}$  wird die Länge des Zeithorizonts festgelegt. Für die simulierten Messwerte zum Zeitpunkt  $t_k$  wird die Kurzschreibweise  $x_k = x(t_k)$  verwendet. Es wird angenommen, dass jeweils in einem konstanten zeitlichen Abstand  $\Delta t$  neue Messwerte  $x_k$  zur Verfügung stehen. Diese werden in der aktuellen MPC-Iteration  $k$  als Startwerte des zu lösenden optimalen Steuerprozesses gewählt:

$$\bar{x}(0) = x_k$$

Eine MPC-Iteration beginnt somit immer zum Zeitpunkt  $\tau_0 = 0$ . Die zulässige maximale Endzeit wird nun durch den Zeithorizont  $T$  festgelegt. Dieser ist üblicherweise deutlich kleiner als die erwartete Prozesszeit von etwa vier Minuten (vgl. Abschnitt 2.1).

#### Verwendung von Endkosten

Aufgrund des verkürzten Zeithorizonts werden keine Bedingungen an die Endzustände in Form der Funktion  $\psi_{end}$  wie beim Lösen des gesamten optimalen Steuerprozesses gestellt. Eine Möglichkeit diese Endbedingungen trotzdem in das Problem einzubinden, ist die Verwendung von Endkosten im Zielfunktional. Es wird ein Problem der Form (4.9) definiert, wobei  $f_0 \equiv 0$  gilt. Neben der Abweichung vom Landeplatz und der Steuerenergie werden nun auch die Höhe und die Geschwindigkeit zum Endzeitpunkt der MPC-Iteration im Zielfunktional berücksichtigt:

$$\begin{aligned} \Phi_{mpc_1}(\bar{x}(T); t_k) &= \Phi_{ocp_3}(\bar{x}(T)) + w_{endb}(t_k) (w_h \Phi_h(\bar{x}(T)) + w_V \Phi_V(\bar{x}(T))) \\ \text{mit} \quad \Phi_h(\bar{x}(T)) &= \begin{cases} 0, & \text{wenn } \bar{h}(T) \geq 10, \\ (\bar{h}(T) - 10)^2, & \text{sonst} \end{cases} \\ \text{und} \quad \Phi_V(\bar{x}(T)) &= \begin{cases} (\bar{V}(T) - 1,9 c(\bar{h}(T)))^2, & \text{wenn } \bar{V}(T) > 1,9 c(\bar{h}(T)), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Die Funktionen  $\Phi_h$  und  $\Phi_V$  sind so definiert, dass eine Unterschreitung der zulässigen Endhöhe von 10 km sowie eine Geschwindigkeit von über dem 1,9-fachen der Schallgeschwindigkeit bestraft werden. Da zum Zeitpunkt des Wiedereintritts die Geschwindigkeit und somit auch die Machzahl sehr hoch ist, sorgt zunächst der Einfluss von  $\Phi_V$  dafür, dass eine zielführende Flugbahn gewählt wird. Durch  $\Phi_h$  wird zum späteren Zeitpunkt verhindert, dass das Fahrzeug tiefer als gewünscht in die Atmosphäre eindringt. Der Term  $\Phi_{ocp_3}$  vermindert weiterhin die Abweichung vom

gewünschten Landepunkt bei minimaler Steuerenergie. Die Funktionen  $\Phi_h$  und  $\Phi_V$  sind auch an den kritischen Punkten ( $\bar{h}(\tau_f) = 10$  und  $\bar{V}(\tau_f) = 1,9 c(\bar{h}(\tau_f))$ ) stetig differenzierbar. Somit gilt dies auch für das gesamte Zielfunktional  $\Phi_{mpc_1}$ .

Durch den Gewichtungsfaktor  $w_{endb}(t_k) \in [0, 1]$  mit  $w_{entf}(t_k) + w_e + w_{endb}(t_k) = 1$  wird der Einfluss der Endbedingungen im Verhältnis zur Minimierung der Entfernung und der Steuerenergie bestimmt. Zunächst wurden alle Gewichtungsfaktoren als zeitlich konstant angenommen. Unter dieser Voraussetzung ist es jedoch schwierig, sowohl die Endbedingungen der Höhe und der Geschwindigkeit zu erfüllen als auch die Entfernung zum gewünschten Landepunkt  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$  zu minimieren. In der Theorie der modellprädiktiven Regelung werden Probleme dieser Art durch die Forderung der Ungleichung (4.10) aus Satz 4.6 vermieden. In der Anwendung wird das Zielfunktional entsprechend angepasst, beispielsweise durch Gewichtungsparameter. Beim Wiedereintritt steht in den ersten MPC-Iterationen das Erreichen der Endbedingungen im Vordergrund. Im weiteren Verlauf kann dann die Gewichtung der Minimierung der Entfernung erhöht werden. Aus diesem Grund wird  $w_{entf}$  in der  $k$ -ten MPC-Iteration abhängig von der aktuellen Prozesszeit  $t_k$  über

$$w_{entf}(t_k) = \frac{w_{entf, Max} - w_{entf, Min}}{250} t_k + w_{entf, Min} \quad (5.15)$$

mit  $w_{entf, Min}, w_{entf, Max} \in [0, 1]$  berechnet. Die Funktion ist so definiert, dass in der ersten MPC-Iteration der minimale Wert für  $w_{entf}$  angenommen wird. Anschließend steigt die Gewichtung linear. Bei der erwarteten Endzeit von etwa 250s entspricht  $w_{entf}$  dem vorgegebenen Maximalwert. Die Gewichtung der Endbedingungen  $w_{endb}$  wird in jedem MPC-Schritt durch

$$w_{endb}(t_k) = 1 - w_{entf}(t_k) - w_e$$

angepasst. Der Faktor der Steuerenergie  $w_e$  bleibt konstant. Damit die Endbedingungen nicht bzw. nicht zu stark verletzt werden, gilt typischerweise  $w_{entf}(t_k) + w_e \ll w_{endb}(t_k)$ .

Innerhalb der Endbedingungen erfolgt eine konstante Gewichtung mittels  $w_h, w_V \in [0, 1]$  mit  $w_h + w_V = 1$ .

### Verwendung einer Referenztrajektorie

Um auch mit möglichst kurzen Prädiktionshorizonten das Fahrzeug auf eine erfolgreiche Flugbahn zu bringen, wird eine alternative Herangehensweise unter Berücksichtigung einer Referenztrajektorie betrachtet. Dazu ist eine im Vorfeld berechnete optimale Lösung notwendig. In diesem Fall wird die durch das optimale Steuerproblem (5.13) mit dem Zielfunktional (5.12) bestimmte Bahn verwendet. Im Gegensatz zur Variante mit Endkosten wird in diesem Fall ein Problem der Form (4.9) mit

$g \equiv 0$  definiert. Durch die Definition des Zielfunktional wird für die Zustände zu jedem Zeitpunkt der Abstand zur jeweiligen Referenzlösung minimiert:

$$\Phi_{mpc_2}(\bar{x}(\tau); t_k) = w_{ref,t} \Phi_{ref,t}(\bar{x}(\tau)) + w_e \Phi_e(\bar{x}(T)) \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \Phi_{ref,t}(\bar{x}(\tau)) = & \int_0^T w_h(\tau) \left( \bar{h}(\tau) - \tilde{h}(\tau) \right)^2 d\tau + \int_0^T w_\lambda(\tau) \left( \bar{\lambda}(\tau) - \tilde{\lambda}(\tau) \right)^2 d\tau \\ & + \int_0^T w_\varphi(\tau) \left( \bar{\varphi}(\tau) - \tilde{\varphi}(\tau) \right)^2 d\tau + \int_0^T w_V(\tau) \left( \bar{V}(\tau) - \tilde{V}(\tau) \right)^2 d\tau \\ & + \int_0^T w_\gamma(\tau) \left( \bar{\gamma}(\tau) - \tilde{\gamma}(\tau) \right)^2 d\tau + \int_0^T w_\chi(\tau) \left( \bar{\chi}(\tau) - \tilde{\chi}(\tau) \right)^2 d\tau \end{aligned}$$

$$\text{und } \Phi_e(\bar{x}(T)) = \bar{e}(T)$$

Mit  $\tilde{x}$  für  $x = h, \lambda, \varphi, V, \gamma, \chi$  wird der Zustandsvektor der Referenztrajektorie bezeichnet. Es werden nur die Referenzlösungen der in Gleichung (5.16) aufgeführten Zustände betrachtet, da es sich bei  $\beta, \omega$  und  $e$  um keine echten Zustandsgrößen des Systems handelt. Durch die Berücksichtigung von  $\Phi_e$  wird weiterhin eine Lösung mit geringer Steuerenergie bevorzugt. Für dessen Gewichtung  $w_e$  gilt  $w_{ref,t} + w_e = 1$  und meist  $w_e \ll w_{ref,t}$ . Die Gewichtung der Zustände ergibt ebenfalls in der Summe 1. Dabei können zudem zeitliche Veränderungen der Gewichtungsparameter berücksichtigt werden. Insbesondere ist eine ausschließliche Gewichtung zum Zeitpunkt  $T$  mit  $w_x(\tau) = 0 \forall \tau < T$  und  $w_x(T) > 0$  interessant. Dadurch wird erreicht, dass die Zustände am Ende des aktuellen Zeithorizonts möglichst gut mit der Referenztrajektorie übereinstimmen, die Werte dazwischen jedoch frei gewählt werden können.

Die Wahl des Zielfunktional (5.16) könnte vor allem bei Störungen, wie abweichenden Anfangswerten, zu Problemen führen, da diese den zeitlichen Verlauf des Wiedereintrittmanövers verändern. Aus diesem Grund wird neben der Zeit auch die Geschwindigkeit als Referenzgröße betrachtet. Es wird die Abweichung der Zustände zum zur aktuellen Geschwindigkeit passenden Zustandswert  $\tilde{x}(\bar{V})$  verringert:

$$\Phi_{mpc_3}(\bar{x}(\tau); t_k) = w_{ref,V} \Phi_{ref,V}(\bar{x}(\tau)) + w_e \Phi_e(\bar{x}(T)) \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \Phi_{ref,V}(\bar{x}(\tau)) = & \int_0^T w_h(\tau) \left( \bar{h}(\tau) - \tilde{h}(\bar{V}(\tau)) \right)^2 d\tau + \int_0^T w_\lambda(\tau) \left( \bar{\lambda}(\tau) - \tilde{\lambda}(\bar{V}(\tau)) \right)^2 d\tau \\ & + \int_0^T w_\varphi(\tau) \left( \bar{\varphi}(\tau) - \tilde{\varphi}(\bar{V}(\tau)) \right)^2 d\tau + \int_0^T w_\gamma(\tau) \left( \bar{\gamma}(\tau) - \tilde{\gamma}(\bar{V}(\tau)) \right)^2 d\tau \end{aligned}$$

$$+ \int_0^T w_\chi(\tau) (\bar{\chi}(\tau) - \tilde{\chi}(\bar{V}(\tau)))^2 d\tau$$

und  $\Phi_e(\bar{x}(T)) = \bar{e}(T)$

Somit wird unter anderem immer das richtige Verhältnis zwischen Geschwindigkeit und Höhe angestrebt. Die Geschwindigkeit eignet sich als Referenzgröße, da sie großen Einfluss auf das System hat und bei der optimalen Bahn einen annähernd monotonen Verlauf zeigt (vgl. Abbildung 6.2). Lediglich zu Beginn des Eintritts steigt die Geschwindigkeit leicht an. Um Eindeutigkeit zu gewährleisten, wird bei der Implementierung von Gleichung (5.17) der jeweils erste zur aktuellen Geschwindigkeit passende Wert verwendet. Da der Anstieg der Geschwindigkeit minimal ist und in dieser Phase auch keine entscheidenden Änderungen der übrigen Zustände stattfinden, ist ein komplexeres Vorgehen nicht notwendig. Für die Gewichtungparameter gelten die gleichen Bedingungen wie beim Zielfunktional (5.16).

### 5.2.2 Numerische Bestimmung der Lösung

Bei der Berechnung der optimalen Bahn mit Hilfe des MPC-Verfahrens wird in jedem Iterationsschritt ein optimaler Steuerprozess der Form

$$\begin{aligned} \min_{\bar{x}} \quad & \Phi_{mpc_i}(\bar{x}(\tau); t_k) & i \in [1, 3] \\ \text{unter} \quad & \dot{\bar{x}}(\tau) = f(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)), \\ & \bar{x}(0) - x_k = 0, \\ & b(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) \leq 0, \quad \forall \tau \in [0, T] \end{aligned} \tag{5.18}$$

gelöst. Durch den Index  $i$  des Zielfunktionals wird zwischen der Variante mit Endkosten, der Referenztrajektorie mit Zeit oder Geschwindigkeit als Referenzgröße unterschieden. Die Zustands-, Steuer- und Pfadbeschränkungen, die in Form der Funktion  $b: \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{19}$  angegeben werden, entsprechen der Definition aus Gleichung (5.5).

Wie in Kapitel 4 (vgl. Gleichung (4.4)) erläutert, wird mit der berechneten optimalen Lösung  $\bar{u}^*$  so lange gesteuert, bis eine neue Steuerung aus dem aktuellen Messwert  $x_{k+1}$  berechnet wurde:

$$u(t_k + \tau) = \bar{u}^*(x_k, \tau), \quad \forall \tau \in [0, \Delta t)$$

Im nächsten Iterationsschritt wird das optimale Steuerproblem (5.18) mit den neuen Messwerten  $x_{k+1}$  als Anfangswerten für das nächste Zeitintervall gelöst.

## Numerische Simulation

In Abbildung 5.2 ist die im Rahmen dieser Arbeit implementierte MPC-Regelung und Simulation des Wiedereintrittproblems dargestellt. Abbildung 5.2 zeigt, dass bei der Regelung zur Skalierung, Diskretisierung und Optimierung die gleichen Verfahren wie zur Lösung des gesamten optimalen Steuerprozesses in Abschnitt 5.1.3 verwendet werden.

Aus der Lösung des nichtlinearen Optimierungsproblem wird in jedem Schritt nur die optimale Steuerung  $\bar{u}^*$  direkt für die Berechnung der optimalen Trajektorie verwendet. Die zugehörigen Zustände  $x$  werden mit einem Integrationsverfahren aus  $\bar{u}^*$  berechnet. Dabei kann eine gestörte Systemdynamik verwendet werden. Auf diese Weise werden neue Messwerte simuliert, die dem Fahrzeug während des Flugs durch IMU-Daten zur Verfügung stehen (vgl. Kapitel 2). Zum aktuellen Zeitpunkt  $t_k$  werden diese Messwerte mit  $x_k$  bezeichnet und sind die Anfangswerte der nächsten MPC-Iteration. Zur Integration der Systemdynamik wird typischerweise ein Verfahren höherer Ordnung verwendet als zur Diskretisierung. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein 4-stufiges Runge-Kutta-Verfahren angewandt (vgl. Abschnitt 3.2.2).

Zudem können die in der vorherigen Iteration gewonnenen Informationen aus der Lösung des nichtlinearen Optimierungsproblems zur schnelleren Lösung der nächsten Iteration genutzt werden. So werden die Lösungen des vorherigen Schritts für die Zustände  $\bar{x}^*$  und die Steuerung  $\bar{u}^*$  auf dem entsprechenden Zeithorizont für die nächste Iteration als Startschätzung verwendet. Auch für die bei der Optimierung (vgl. Abschnitt 3.1.1) auftretenden dualen Variablen  $\bar{\mu}^*$  können durch die letzte Iteration gute Schätzungen angegeben werden. Mit den simulierten Messwerten als neue Anfangswerte und den zur Verfügung stehenden Startschätzungen wird ein neuer optimaler Steuerprozess der Form (5.18) definiert. Dieser wird erneut mit dem Trapez-Verfahren diskretisiert und dem SQP-Verfahren optimiert. Dadurch entsteht, wie in Abbildung 5.2 dargestellt, ein geschlossener Regelkreis.

Durch die Verwendung der Startschätzungen kann bei der Lösung des einzelnen optimalen Steuerprozesses Rechenzeit eingespart werden. Bei Fixierung des Startzeitpunktes und der Anfangswerte kann so eine in der letzten MPC-Iteration berechnete

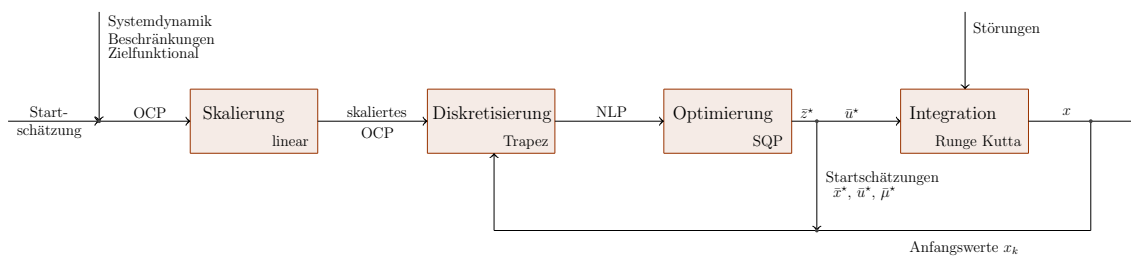


Abbildung 5.2: Schematische Darstellung der Berechnung der optimalen Regelung

optimale Lösung durch Vorgabe der optimalen Startschätzungen nach 0 *WORHP*-Iterationen wieder erreicht werden. Auch bei einer Verschiebung des Startzeitpunktes können durch geeignete Startschätzungen der Zustände, der Steuerung und der dualen Variablen einige Iterationen des NLP-Lösers gespart werden.

### MPC-Parameter und Abbruchbedingungen

Der MPC-Algorithmus wird durch folgende Parameter charakterisiert:

- Länge des Zeithorizonts  $T$
- Zeitabstand zwischen zwei diskreten Punkten  $t_d$
- Zeitabstand zwischen zwei MPC-Iterationen  $\Delta t$

Aus der Zeit zwischen zwei diskreten Punkten  $t_d$  wird in Abhängigkeit der zu erwartenden Endzeit die Anzahl der Stützstellen bestimmt. Weiterhin muss die Zeit  $\Delta t$  festgelegt werden, nach der eine neue MPC-Iteration gestartet wird. In diesem konstanten Abstand werden durch Integration der Steuerung mit dem Runge-Kutta-Verfahren neue Messwerte simuliert und als Anfangswerte für die nächste Iteration verwendet. Im anschließenden Kapitel 6 werden Resultate zu unterschiedlichen Varianten dieser Parameter dargelegt und analysiert.

Das MPC-Verfahren und somit insbesondere die Lösung des optimalen Steuerproblems (5.18) wird solange fortgesetzt bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist. Da die erreichten Endzustände in jedem Iterationsschritt durch Störungen verändert werden können, macht es keinen Sinn, ein Abbruchkriterium über eine Toleranz für die gewünschten Endzustände zu definieren. Aus diesem Grund wird der Algorithmus erst abgebrochen, wenn der nächste Startzeitpunkt zeitlich hinter dem aktuellen Endzeitpunkt liegt. Tritt dieser Fall nach einer maximalen Anzahl an Iterationen nicht ein, wird der Algorithmus ebenfalls beendet. Außerdem wird abgebrochen, wenn keine Lösung des nichtlinearen Optimierungsproblems gefunden werden kann.

### 5.2.3 Berücksichtigung von Störungen

Der Vorteil der Regelung gegenüber der Steuerung liegt in der Möglichkeit auf Störungen verschiedener Art reagieren zu können. Da es bei der Landung auf anderen Planeten viele nicht exakt bekannte Parameter gibt, wie beispielsweise die Zusammensetzung der Atmosphäre, ist es wichtig, bereits im Vorfeld zu analysieren wie gut ein Regelungsverfahren mit solchen Störungen umgehen kann. Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei unterschiedliche Arten von Störungen untersucht: Zum Einen werden Abweichungen bestimmter Parameter in der Systemdynamik betrachtet. Dadurch weichen die neuen simulierten Messwerte von den vorhergesagten Zuständen ab. Diese Art von Störungen ist auch in Abbildung 5.2 eingezeichnet. Zum Ande-



ren werden die Anfangswerte variiert. Auch eine Kombination beider Formen von Störungen wird betrachtet.

Beim Wiedereintrittsproblem treten zwei wesentliche Ursachen für Störungen auf, die die Systemdynamik beeinflussen. Die größten erwarteten Abweichungen zur Realität liegen bei den Daten des Atmosphärenmodells *EMCD*. Aus diesem Grund werden sowohl die Daten für die Dichte als auch für die Schallgeschwindigkeit mit einer normalverteilten Störung  $p_\rho$  bzw.  $p_c$  versehen:

$$\begin{aligned}\rho_{dis}(h) &= \rho(h) + p_\rho \rho(h) \\ c_{dis}(h) &= c(h) + p_c c(h)\end{aligned}\tag{5.19}$$

Die Faktoren  $p_\rho$  und  $p_c$  werden für jede Höhe  $h$  zufällig aus einer Normalverteilung mit dem Mittelwert  $\mu_{atm}$  und der Standardabweichung  $\sigma_{atm}$  bestimmt. Im Rahmen dieser Arbeit werden Abweichungen in den Atmosphärendaten mit Mittelwerten von  $-40$  bis  $10\%$  und Standardabweichungen von  $2$  und  $4\%$  untersucht. Abbildung 5.3 zeigt exemplarisch den Einfluss verschiedener Mittelwerte und Standardabweichungen auf die Dichte der Atmosphäre (links) und die Schallgeschwindigkeit (rechts). Durch die gestrichelten Linien wird der Bereich begrenzt, in dem abhängig von der Standardabweichung mit  $99\%$ -iger Wahrscheinlichkeit der Wert  $\rho_{dis}(h)$  bzw.  $c_{dis}(h)$  liegt. Da die Dichte in Höhen über  $50\text{ km}$  sehr gering ist, ist der Betrag der Abweichung in diesem Fall bei allen Störfällen ebenfalls klein. Erst wenn das Fahrzeug tiefer in die Atmosphäre eingedrungen ist, ist ein deutlicher Unterschied zum ungestörten Fall erkennbar. Die Schallgeschwindigkeit ändert sich mit der Höhe nicht so stark, sodass die absolute Abweichung vom ungestörten Wert für alle Höhen etwa gleich bleibt.

Die Verschiebung des Mittelwertes mit relativ geringer Standardabweichung verhindert, dass sich positive und negative Störungen ausgleichen. Negative Störungen sind interessanter als positive, da sie eine noch dünnere Atmosphäre simulieren als angenommen. Dadurch liegt die simulierte tatsächliche Geschwindigkeit des Fahrzeugs über der vom Optimierer ermittelten Geschwindigkeit. Demzufolge steigt die Schwierigkeit, das Fahrzeug rechtzeitig abbremsen zu können.

In Kapitel 2 wurde erläutert, dass der Anstellwinkel  $\alpha$  bei den Berechnungen im Rahmen dieser Arbeit als konstant angenommen wird. Schwankungen in  $\alpha$  wirken sich unter den getroffenen Annahmen nur in den fahrzeugspezifischen Konstanten  $C_D$  und  $C_L$  aus. Aus diesem Grund werden diese Konstanten als weitere Ursache für Störungen angenommen. Da  $C_D$  und  $C_L$  in die Berechnung des Auftriebs und des Strömungswiderstandes eingehen, wirken sich Abweichungen ebenfalls auf die Sys-

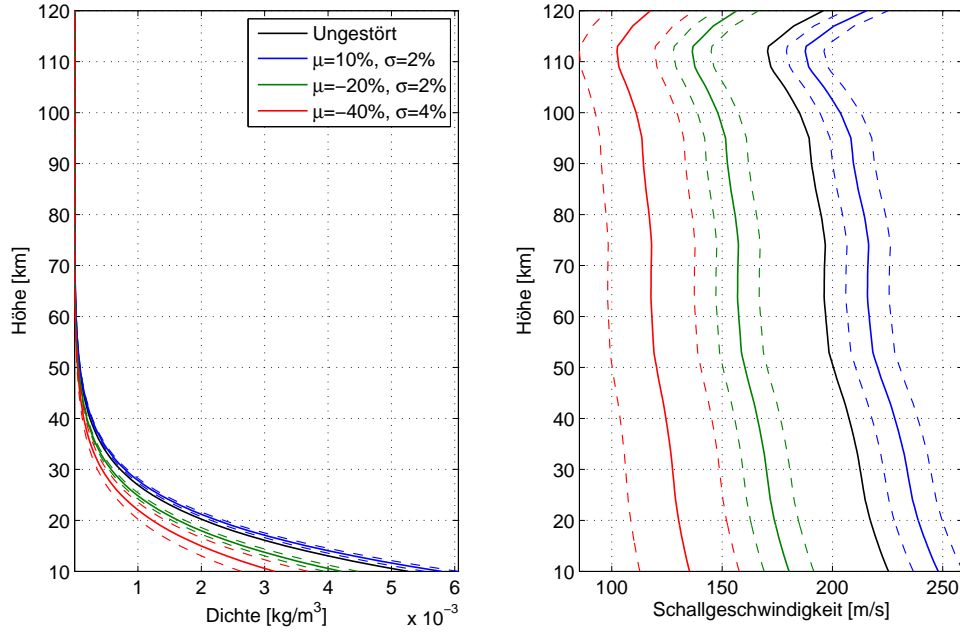


Abbildung 5.3: Auswirkungen von Störungen mit verschiedenen Mittelwerten  $\mu$  und Standardabweichungen  $\sigma$  auf die Dichte der Atmosphäre (links) und die Schallgeschwindigkeit (rechts).

temdynamik und damit die Integration der Zustände aus. Analog zu den Störungen in den Atmosphärendaten werden auch in diesem Fall gestörte Daten

$$\begin{aligned} C_{D_{dis}}(M) &= C_D(M) + p_{C_D} C_D(M) \\ C_{L_{dis}}(M) &= C_L(M) + p_{C_L} C_L(M) \end{aligned} \quad (5.20)$$

betrachtet. Dabei sind  $p_{C_D}$  und  $p_{C_L}$  normalverteilte Zufallsgrößen um den Mittelwert  $\mu_{const}$  mit der Standardabweichung  $\sigma_{const}$ . Für  $\mu_{const}$  und  $\sigma_{const}$  werden die gleichen Bereiche untersucht wie für  $\mu_{atm}$  und  $\sigma_{atm}$ .

Weitere mögliche Störungen sind Abweichungen in den Anfangswerten. Da besonders die Höhe und die Geschwindigkeit des Fahrzeugs für das Gelingen der Mission von Bedeutung sind, werden für diese Größen unterschiedliche Anfangswerte untersucht. Da geringere Eintrittshöhen und höhere Eintrittsgeschwindigkeiten eine größere Gefahr darstellen als der umgekehrte Fall, werden vor allem diese Situationen betrachtet. Die untersuchten Anfangshöhen variieren zwischen 100 und 130 km und die Anfangsgeschwindigkeiten zwischen 5000 und 6500  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Das entspricht relativen Abweichungen von  $-16,7\%$  bis  $8,3\%$  bzw.  $-8,1\%$  bis  $19,5\%$  von den Normalwerten, die bei 120 km und 5440,8  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$  liegen (vgl. Tabelle 5.1). Beim Vergleich dieser Störungen ist zu berücksichtigen, dass sich ähnliche starke Abweichungen der Ein-

trittshöhe und Eintrittsgeschwindigkeit nicht zwangsläufig ähnlich auf das System auswirken. Die entscheidende Größe, um die angestrebte Geschwindigkeitsreduktion zu erreichen, ist der Strömungswiderstand  $D$  (vgl. Gleichung (2.2)). Tabelle 5.2 gibt den Strömungswiderstand  $D_0$  zum Zeitpunkt des Wiedereintritts bei verschiedenen Eintrittshöhen  $h_0$  und Eintrittsgeschwindigkeiten  $V_0$  an.

$h_0$ [km]	$D_0$ [ $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ]	$V_0$ [ $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ]	$D_0$ [ $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ]
100	0,016 35	6500	0,000 89
105	0,008 26	6250	0,000 83
110	0,003 90	6000	0,000 76
115	0,001 59	5750	0,000 70
120	0,000 63	5440,8	0,000 63
125	0,000 28	5250	0,000 59
130	0,000 14	5000	0,000 53

Tabelle 5.2: Strömungswiderstand  $D_0$  bei verschiedenen Eintrittshöhen  $h_0$  (links) und Eintrittsgeschwindigkeiten  $V_0$  (rechts).

Bei Verwendung der Standardwerte von 120 km und  $5440,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  beträgt der Strömungswiderstand  $0,000 63 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Bei einer geringeren Anfangshöhe ist die Dichte der Atmosphäre höher. Aus diesem Grund steigt der Strömungswiderstand bei geringeren Höhen an und nimmt bei größeren Höhen ab. Eine höhere Geschwindigkeit führt erwartungsgemäß ebenfalls zu einem größeren Strömungswiderstand. Allerdings sind in diesem Fall die Unterschiede nicht so groß. Während eine um 16,7% geringere Höhe zu mehr als dem 25-fachen Strömungswiderstand führt, wird durch eine um 19,5% höhere Geschwindigkeit der Ausgangswert des Strömungswiderstandes um weniger als die Hälfte erhöht. Es liegt somit nahe, dass höhere Eintrittsgeschwindigkeiten zu größeren Problemen in der Geschwindigkeitsreduktion führen als geringere Eintrittshöhen.

Abschließend werden gleichzeitige Abweichungen in den Atmosphärendaten und den Anfangswerten untersucht. Eine Analyse der Einflüsse unterschiedlicher Störungen auf die mit dem MPC-Verfahren berechneten Trajektorien liefern die Abschnitte 6.2.2 und 6.3.2 des folgenden Kapitels.

# Kapitel 6

## Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die wichtigsten im Rahmen dieser Arbeit entwickelten numerischen Resultate vorgestellt. Abschnitt 6.1 veranschaulicht zunächst die Lösung des kompletten optimalen Steuerprozesses (vgl. Abschnitt 5.1). Anfangs wird dabei das Zielfunktional zur Maximierung der Seitenreichweite  $\Phi_{ocp1}$  verwendet. Anhand dieser Lösung wird ein möglicher Landeplatz bestimmt und die optimale Bahn zu diesem Punkt berechnet. In Abschnitt 6.2 werden die Ergebnisse des MPC-Verfahrens unter Einbeziehung der Endkosten (vgl. Abschnitt 5.2.1, Zielfunktional (5.14)) dargestellt. Zunächst werden verschiedene Gewichtungsfaktoren im Zielfunktional systematisch untersucht. Anschließend wird der Einfluss des Zeithorizonts analysiert. Mit den ermittelten Größen wird abschließend die Stabilität des Verfahrens bei verschiedenen Störungen getestet. Zuletzt werden in Abschnitt 6.3 die Resultate des MPC-Verfahrens bei Verwendung einer Referenztrajektorie erläutert (vgl. Abschnitt 5.2.1, Zielfunktionale (5.16) und (5.17)). Dazu wird die in Abschnitt 6.1 berechnete optimale Bahn als Referenztrajektorie verwendet. Analog zu Abschnitt 6.2 werden zunächst gute Einstellungen der Parameter gesucht und anschließend die Auswirkung verschiedener Störungen betrachtet.

Für alle numerischen Berechnungen wird die Optimierungssoftware *WORHP* mit der Schnittstelle für optimale Steuerprobleme *TransWORHP* angewandt. Bei der Diskretisierung des optimalen Steuerprozesses wird das Trapez-Verfahren verwendet. Anschließend wird das Optimierungsproblem mit Hilfe des NLP-Lösers *WORHP*, der auf dem SQP-Verfahren (vgl. Abschnitt 3.1.2) basiert, gelöst. Für die Berechnung der Hessematrix der Lagrange-Funktion stehen in *WORHP* verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung. Erste Untersuchungen mit dem BFGS-Update haben keine guten Resultate erzielt (vgl. Tabelle A.1 im Anhang). Daher wird die Approximation in den dargestellten Ergebnissen durch finite Differenzen bestimmt (vgl. Parameterdatei von *WORHP* im Anhang B). Die maximale Anzahl an *WORHP*-Iterationen wird bei der Lösung des gesamten optimalen Steuerprozess auf 500 gesetzt und die zu erreichenden Toleranzen entsprechen den Standardeinstellungen von *WORHP* (vgl. Parameterdatei von *WORHP* im Anhang B). Bei der anschließenden Anwendung des MPC-Verfahrens wird die maximale Anzahl an Iterationen auf 50 herabgesetzt.

Zudem werden die Toleranzgrenzen erhöht (vgl. Parameterdatei von *WORHP* im Anhang B). Da ohnehin davon ausgegangen wird, dass der aktuelle Messwert nicht exakt mit der Vorhersage aus der letzten MPC-Iteration übereinstimmt, ist es zielführender, zu Gunsten der Rechenzeit einen etwas größeren Fehler des NLP-Lösers zu akzeptieren.

## 6.1 Resultate des OCP

### Maximierung der Seitenreichweite

Zuerst wird für die numerische Lösung des Wiedereintrittproblems die maximale Seitenreichweite mit den gegebenen Anfangsbedingungen (2.11) ermittelt. Dazu wird das Zielfunktional  $\Phi_{ocp1}$  (vgl. Gleichung (5.9)) unter den erläuterten Randbedingungen und Beschränkungen minimiert. Zur Diskretisierung werden 100 äquidistante Stützstellen gewählt. Abbildung 6.1 zeigt die Lösung dieses optimalen Steuerprozesses. Alle in diesem Kapitel beispielhaft dargestellten Testfälle sind gleich aufgebaut: Die Abbildung enthält jeweils zwölf Graphen, wobei die Kurven der Zustände blau, der Steuergröße rot und der Pfadbeschränkungen grün eingezeichnet sind. Bis auf die geographische Länge und Breite werden alle Variablen über der Zeit aufgetragen. Diese beiden Größen werden in Abhängigkeit voneinander abgebildet, sodass die berechnete Flugbahn in der Draufsicht dargestellt wird. In der obersten Zeile sind zudem die Endwerte der jeweiligen Zustände angegeben, sodass direkt abgelesen werden kann, ob die Endbedingungen für die Höhe und die Geschwindigkeit eingehalten werden und an welcher Position sich das Fahrzeug am Ende der Eintrittsphase befindet. In der zweiten Zeile sind der Bahnneigungswinkel, der Azimut sowie der Rollwinkel dargestellt. Die dritte Zeile enthält die Geschwindigkeit des Rollwinkels, die Steuerenergie und mit der Beschleunigung des Rollwinkels auch die Steuergröße. In der untersten Zeile sind die Pfadbeschränkungen (dynamischer Druck, Wärmeflussdichte und Lastvielfaches) abgebildet. Es ist zudem der jeweils erlaubte Maximalwert als gestrichelte Linie aufgetragen.

Abbildung 6.1 zeigt die Lösung des in Abschnitt 5.1.2 erläuterten optimalen Steuerprozesses zur Maximierung der Seitenreichweite. Systematische Tests (vgl. Anhang Tabelle A.1) haben gezeigt, dass dabei eine Gewichtung von  $w_e = 1\%$  der Steuerenergie und  $w_\varphi = 99\%$  der Seitenreichweite zielführend ist.

Die berechnete optimale Bahn zeigt den typischen Verlauf eines Wiedereintrittsmäners. Ähnliche Graphen für die Höhe und die Geschwindigkeit sind beispielsweise auch bei *ASTRIUM* [1, Abb. 5.22] und *MENDECK* und *CRAIG* [24, Abb. 2] abgebildet. In den ersten 100s sinkt das Fahrzeug stark, verliert aber in der ersten Minute kaum an Geschwindigkeit. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Atmosphäre in diesen Höhen noch zu dünn ist, um das Fahrzeug durch den Strömungswiderstand

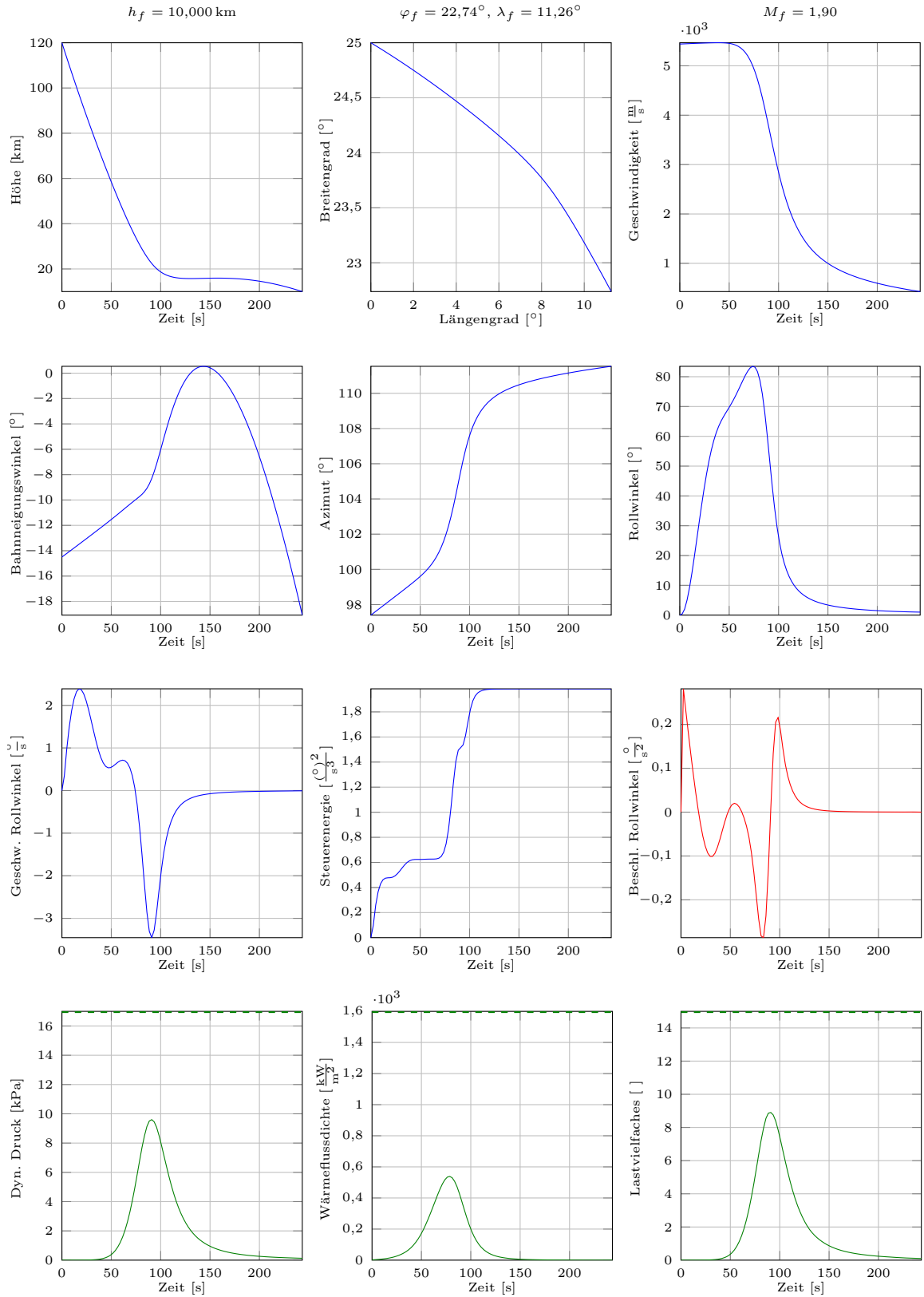


Abbildung 6.1: Optimale Steuerung zur Maximierung der Seitenreichweite. Diskrete Punkte: 100, Optimierungsvar.: 1001, Nebenbed.: 2798. Benötigte Rechenzeit: 288s, WORHP-It.: 35.

entscheidend abzubremsen. Das Maximum des Rollwinkels bei etwa 80 s deutet darauf hin, dass sich an diesem Punkt das Manöver verändert. Die Veränderung des Rollwinkels führt zu mehr Auftrieb, sodass das Fahrzeug nach etwa 100 s nur noch geringfügig an Höhe verliert. Zu dieser Zeit ist auch der Wert des Bahnneigungswinkels höher, was ebenfalls bestärkt, dass sich das Fahrzeug nicht mehr im direkten Sinkflug befindet. Die in grün dargestellten Pfadbeschränkungen in der letzten Zeile zeigen, dass die Grenzen zu keiner Zeit erreicht werden. Die höchsten Belastungen liegen deutlich unter den zugelassenen Maximalwerten. Diese treten etwa 80 bis 90 s nach dem Wiedereintritt auf, was ebenfalls typisch für ein solches Manöver ist (vgl. ASTRUM [1, Tab. 4.1]). Auch die gesamte Prozesszeit dieser Phase liegt mit knapp 250 s im Bereich des bei ASTRUM [1, Tab. 4.1] angegebenen Wertes.

Diese Lösung zeigt, dass es bei dem gegebenen Setting möglich ist, nur durch die Rotation des Fahrzeugs und somit optimales Ausnutzen der Bremswirkung der Atmosphäre die Geschwindigkeit des Fahrzeugs bis zu einer Höhe von 10 km auf das 1,9-fache der Schallgeschwindigkeit zu reduzieren. Somit ist gewährleistet, dass der Fallschirm am Ende dieser Phase geöffnet und die letzte Landephase eingeleitet werden kann. Die zulässigen Grenzen der Endhöhe und der Endgeschwindigkeit werden dabei ausgereizt wie Abbildung 6.1 zeigt. Das Zielfunktional  $\Phi_{ocp_1}$  mit dem Schwerpunkt auf der Maximierung der Seitenreichweite bewirkt, dass sich das Fahrzeug in 10 km Höhe bei  $22,74^\circ\text{N}$  und  $11,26^\circ\text{O}$  befindet. Unter den gewählten Bedingungen ist somit eine maximale Entfernung vom Startpunkt in Nord-Süd-Richtung von etwa  $2,26^\circ$  möglich, was ungefähr  $134\text{ km}^{13}$  auf dem Mars entspricht. In östliche Richtung werden  $11,26^\circ$  und somit etwa  $615\text{ km}^{14}$  zurückgelegt.

### Anflug eines bestimmten Landepunktes

Die ermittelten Ergebnisse des ersten optimalen Steuerproblems werden zur Bestimmung eines geeigneten Landepunktes in 10 km Höhe verwendet. Die gewünschte geographische Breite liegt in einer Entfernung von 75 % der maximal möglichen Distanz vom Anfangspunkt aus (vgl. Gleichung (5.10)):

$$\tilde{\varphi} = 25^\circ - 0,75 |25^\circ - 22,74^\circ| \approx 23,3^\circ$$

Abhängig von der geographischen Breite wird die erreichbare geographische Länge gesucht. Dazu wird der optimale Steuerprozess mit dem Zielfunktional  $\Phi_{ocp_2}$  (vgl. Gleichung (5.11)) gelöst. Das Ergebnis ist im Anhang unter Abbildung A.2 zu finden. Die berechnete geographische Länge beträgt etwa  $\tilde{\lambda} = 11,3^\circ$ .

Nun soll mit Hilfe des Zielfunktional  $\Phi_{ocp_3}$  (vgl. Gleichung (5.12)) die optimale Bahn gefunden werden, die bei minimaler Energie den Punkt  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$  möglichst gut erreicht.

<sup>13</sup>Berechnung durch  $2,26^\circ \frac{2\pi r_M}{360^\circ} \approx 134\text{ km}$ .

<sup>14</sup>Berechnung durch  $11,26^\circ \frac{2\pi r_M \cos(22,74^\circ)}{360^\circ} \approx 615\text{ km}$ .

Zur Lösung dieses optimalen Steuerproblems werden 100 diskrete Zeitpunkte verwendet.

Die einzelnen Zustände der Lösung des Problems (5.12) sind in Abbildung 6.2 zu finden. Die Graphen sind analog zu Abbildung 6.1 angeordnet. Jedoch ist an Stelle der Endwerte für die geographische Länge und Breite die Entfernung  $d$  zum Punkt  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$  angegeben. Sie ergibt sich aus:

$$d = \sqrt{\left((\tilde{\varphi} - \varphi_f) \frac{2\pi r_M}{360^\circ}\right)^2 + \left((\tilde{\lambda} - \lambda_f) \frac{2\pi r_M \cos(\varphi_f)}{360^\circ}\right)^2} \quad (6.1)$$

Auf dem Mars entspricht ein Breitengrad etwa 59 km. Die Entfernung zwischen zwei Längengraden ist hingegen vom Breitengrad abhängig: Am Äquator sind es auch etwa 59 km, zu den Polen geht der Abstand gegen 0 km, da sich die Längengrade dort treffen. Dies wird in der Berechnung von  $d$  berücksichtigt. In Abbildung 6.2 ist der gewünschte Landeplatz  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$  markiert. Der Umkreis eines tolerierten Fehlers von bis zu 12,5 km ist grau hinterlegt.

Man kann erkennen, dass es eine optimale Steuerung gibt, die das Fahrzeug genau zu dem gewünschten Landeplatz steuert. Ein Blick auf die Zustände zeigt, dass es einige Gemeinsamkeiten, aber auch gewisse Unterschiede zu der Bahn des ersten optimalen Steuerprozesses gibt. Die Graphen der Höhe und der Geschwindigkeit zeigen einen ähnlichen Verlauf wie in Abbildung 6.1. Auch in diesem Fall werden die Grenzen von 10 km und einer Machzahl von 1,9 angenommen.

Der Verlauf der berechneten optimalen Steuerung unterscheidet sich in den ersten 150 s stark von der Steuerung des ersten Problems. Es resultiert ein in etwa entgegengesetzter Verlauf des Rollwinkels. Dieser nimmt zunächst stark ab bis zu einem Wert von fast  $-140^\circ$  und steigt anschließend in gleichem Maße wieder an. Im Gegensatz zur in Abbildung 6.1 dargestellten Trajektorie gibt es eine weitere Extremstelle. Erst nach dem Erreichen eines Maximums von etwa  $25^\circ$  bei 115 s konvergiert der Wert gegen  $0^\circ$ . Auch der Verlauf des Bahnazimuts unterscheidet sich von der vorherigen Abbildung. Der Wert steigt nicht monoton an, sondern nimmt nach etwa 70 s ein Minimum an, welches ungefähr dem Ausgangswert entspricht. Anschließend steigt der Wert wieder stark an. Die Endposition liegt mit  $\tilde{\varphi} = 23,3^\circ$  und  $\tilde{\lambda} = 11,3^\circ$  etwa auf dem gleichen Längengrad, aber etwas nördlicher als der in Abbildung 6.1 erreichte Zielpunkt. Daher ist ein anderer Verlauf der Flugbahn notwendig, bei dem trotzdem genug Geschwindigkeit reduziert werden kann. Als Folge ergeben sich die Unterschiede im Rollwinkel und Azimut.

Die Werte der Pfadbeschränkungen bezüglich des dynamischen Drucks, der Wärmeflussdichte und des Lastvielfachen sind etwas höher als beim vorherigen Problem. Sie liegen aber weiterhin deutlich unter den zulässigen Maximalwerten. Die Dauer der



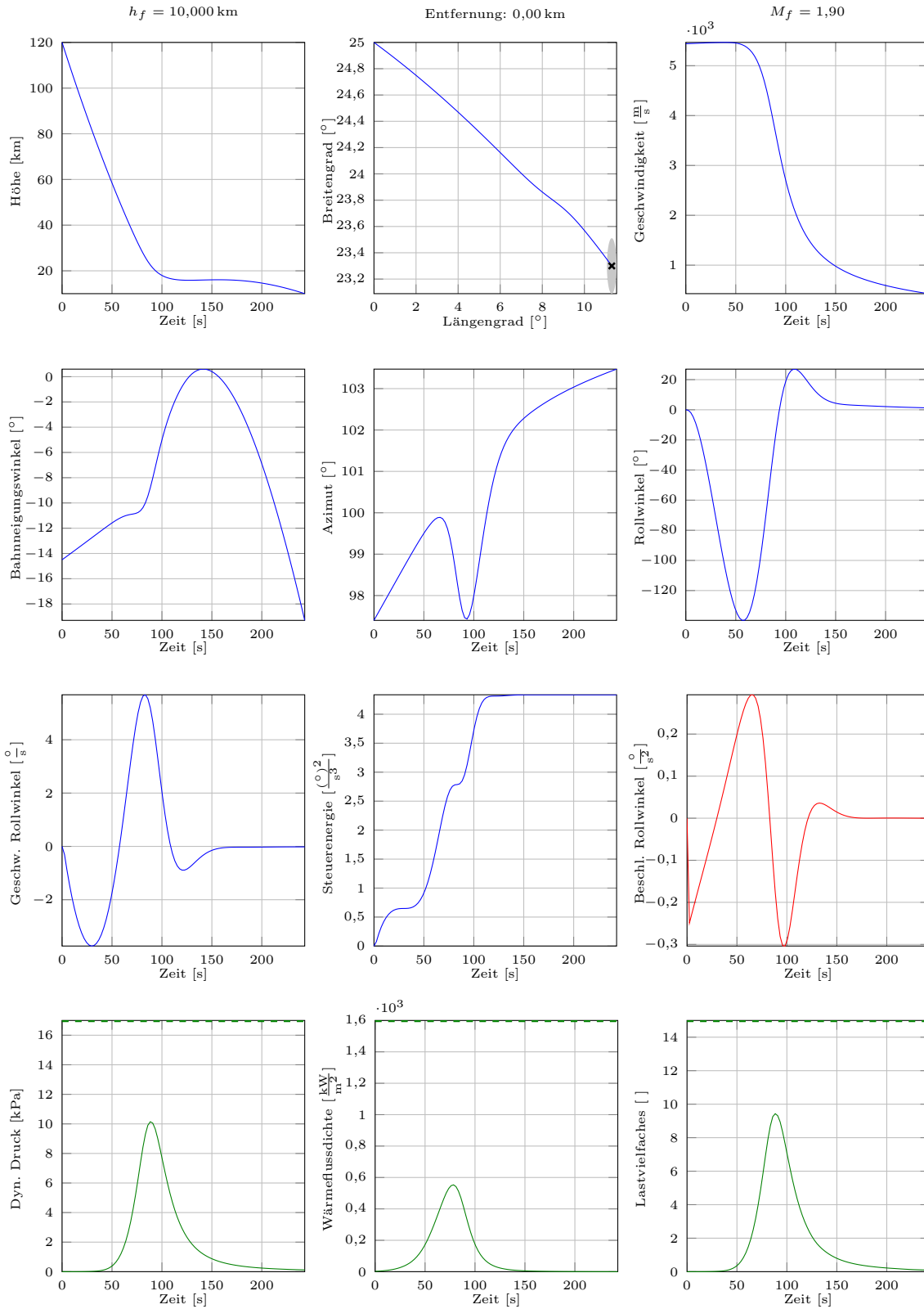


Abbildung 6.2: Optimale Steuerung zu einem bestimmten Landepunkt. Diskrete Punkte: 100, Optimierungsvar.: 1001, Nebenbed.: 2798. Benötigte Rechenzeit: 273s, WORHP-It.: 105.

betrachteten Phase liegt mit knapp 250 s im gleichen Bereich wie die benötigte Zeit bei der Maximierung der Seitenreichweite.

Diese Lösung zeigt, dass es eine Steuerung gibt, die das Fahrzeug an den gewünschten Landeplatz bringt und dabei die Minimalhöhe und Maximalgeschwindigkeit einhält. Aus diesem Grund wird das in Abbildung 6.2 betrachtete Setting im Folgenden für die Lösung mit einem MPC-Verfahren verwendet.

## 6.2 Resultate des MPC-Verfahrens mit Endkosten

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse zur Berechnung der optimalen Bahn bei Verwendung des MPC-Verfahrens mit Endkosten in Form des Zielfunktional  $\Phi_{mpc1}$  (vgl. Gleichung (5.14)) dargelegt. Die numerische Lösung erfolgt anhand der in Abschnitt 5.2.2 erläuterten Vorgehensweise.

Da im Folgenden auch Störungen (vgl. Abschnitt 5.2.3) berücksichtigt werden, ist zu erwarten, dass die Endbedingungen nicht mehr exakt eingehalten werden können. Relative Fehler von bis zu 5 % sind akzeptabel. Bei einer realen Anwendung des MPC-Verfahrens können Abweichungen in diesem Bereich durch eine schärfer als notwendige Formulierung der Endbedingungen ausgeglichen werden. Somit werden eine Endhöhe von bis zu 9,5 km und eine Machzahl von bis zu 2 als gutes Ergebnis bewertet.

Zum Vergleich von Ergebnissen mit unterschiedlichen Zielfunktionalen (beispielsweise durch verschiedene Gewichtungparameter) wird folgende Bewertungsfunktion eingeführt:

$$\theta(x_f) = \max\left(0, \frac{10 \text{ km} - h_f}{10 \text{ km}}\right) + \max\left(0, \frac{M_f - 1,9}{1,9}\right) + \frac{d(\lambda_f, \varphi_f)}{250 \text{ km}} \quad (6.2)$$

Die Entfernung  $d$  wird gemäß Gleichung (6.1) berechnet und mit 250 km skaliert. Dadurch tragen eine Höhe von 9,5 km, eine Machzahl von 2 (was jeweils einem Fehler von etwa 5 % entspricht) und eine Entfernung von 12,5 km jeweils den gleichen Wert zur Bewertungsfunktion bei. Für eine Trajektorie, bei der die Endbedingungen erfüllt sind und der Landepunkt genau erreicht wird, hat die Bewertungsfunktion den Wert 0. Je stärker mindestens eins der Kriterien vom angestrebten Ziel abweicht, desto höher ist der Wert der Bewertungsfunktion.

## 6.2.1 Systematische Untersuchung der Parameter

### Gewichtungsfaktoren im Zielfunktional

Im Zielfunktional  $\Phi_{mpc1}$  (vgl. Gleichung (5.14)) treten fünf zu bestimmende Gewichtungsfaktoren auf:  $w_{entf}$ ,  $w_{endb}$ ,  $w_e$ ,  $w_h$  und  $w_v$ . Da sich die ersten drei und die letzten beiden jeweils zu 1 addieren (vgl. Abschnitt 5.2), können drei der Parameter frei gewählt werden. Allerdings sind für  $w_{entf}$  lineare zeitabhängige Veränderungen zugelassen (vgl. Gleichung (5.15)). Daher werden hierfür Minimal- und Maximalwert festgelegt.

Es wird also eine geeignete Kombination der vier Gewichtungsfaktoren  $w_{entf,Min}$ ,  $w_{entf,Max}$ ,  $w_e$  und  $w_h$  gesucht. Diese soll für Zeithorizonte von 120 bis 170 s zuverlässige Ergebnisse liefern. Die Resultate der dazu durchgeführten Testfälle sind in Abbildung 6.3 dargestellt.

Durch empirische Untersuchungen wurden die Testbereiche für die Gewichte festgelegt. Abbildung 6.3 zeigt die Ergebnisse für eine Gewichtung der Höhe von  $w_h = 0,96$ . Entsprechende Abbildungen für  $w_h = 0,95$ ,  $w_h = 0,97$  und  $w_h = 0,98$  finden sich im Anhang (vgl. Abbildungen A.3, A.4 und A.5). Die vier dargestellten Teilabbildungen unterscheiden sich in der Gewichtung der Energie  $w_e$ . Es werden die Faktoren 0,05, 0,01, 0,005 und 0,001 betrachtet. In den einzelnen Teilabbildungen sind  $w_{entf,Min}$  und  $w_{entf,Max}$  auf der  $x$ - und  $y$ -Achse und die Länge des Zeithorizonts  $T$  auf der  $z$ -Achse dargestellt. Für die Abstände zwischen zwei diskreten Punkten  $t_d$  sowie die Zeit zwischen zwei MPC-Iterationen  $\Delta t$  wurden 10 s veranschlagt. Eine Variation dieser beiden Parameter wird im Anschluss diskutiert.

Die Farbe der Punkte gibt den Wert der Bewertungsfunktion an. Ein Abbruch des Algorithmus wird durch ein rotes Quadrat symbolisiert. Um besonders gute Ergebnisse differenziert beurteilen zu können, werden alle Lösungen mit einem Wert der Bewertungsfunktion über 0,1 durch ein gelbes Quadrat dargestellt.

Abbildung 6.3 zeigt, dass bei einer Gewichtung der Höhe mit  $w_h = 0,96$  und einer Gewichtung der Energie mit  $w_e = 0,005$  oder  $w_e = 0,05$  der Algorithmus in allen Testfällen verwertbare Lösungen liefert. Bei  $w_e = 0,001$  konnte der NLP-Löser in zwei Fällen und bei  $w_e = 0,01$  in einem Fall keine Lösung finden. Zudem fällt auf, dass das Ergebnis erwartungsgemäß bei längeren Zeithorizonten besser ist. Bei Zeithorizonten von 120 bis 140 s liegt der Wert der Bewertungsfunktion in allen Fällen über 0,1.

Außer der Länge des Zeithorizonts ist für keinen der untersuchten Parameter eine klare Tendenz für bessere oder schlechtere Ergebnisse zu erkennen. Die besten Werte der Bewertungsfunktion werden für eine Gewichtung mit  $w_h = 0,96$ ,  $w_e = 0,005$ ,  $w_{entf,Max} = 0,15$  und  $w_{entf,Min} = 0,0125$  bzw.  $w_{entf,Min} = 0,015$  bei einem Zeithorizont von 160 s erzielt. Bei der Variante mit  $w_{entf,Min} = 0,0125$  sind die Resultate für einen Zeithorizont von 150 und 170 s etwas besser als mit  $w_{entf,Min} = 0,015$ .

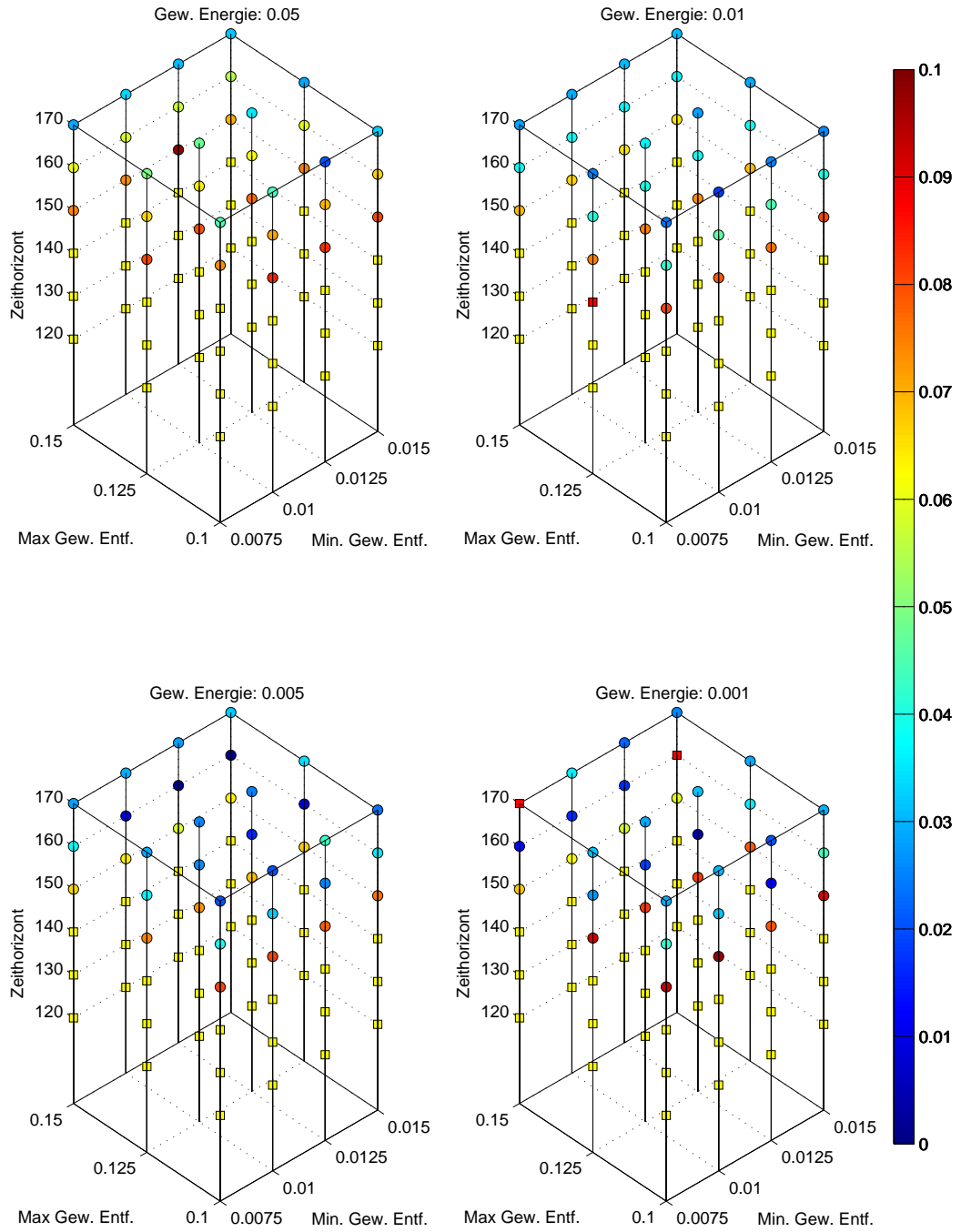


Abbildung 6.3: Variation der Gewichtungparameter der Energie  $w_e$  und der Minimal- und Maximalwerte der Entfernung  $w_{entf, Min}$  und  $w_{entf, Max}$  bei unterschiedlichen Zeithorizonten (Gewichtung der Höhe: 0,96) mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Endkosten.

Aus diesem Grund wird diese Kombination an Gewichtungsfaktoren für die weiteren Untersuchungen bezüglich der Länge des Zeithorizonts und möglichen Störungen verwendet.

### Länge des Zeithorizonts

Neben den Gewichtungsfaktoren müssen weitere charakteristische Parameter bestimmt werden: Der Zeithorizont  $T$ , der Zeitabstand zwei diskreter Punkte  $t_d$  und das Zeitintervall zwischen zwei MPC-Iterationen  $\Delta t$ . Der Zeithorizont  $T$  spielt eine wichtige Rolle (vgl. Abschnitt 4.3). Es ist zu erwarten, dass mit längerem Zeithorizont das Ergebnis besser, aber auch der Rechenaufwand höher wird. Aus diesem Grund wird versucht, den Zeithorizont möglichst kurz zu wählen. Die notwendige Mindestlänge, um das Problem stabil lösen zu können, hängt dabei stark vom betrachteten Prozess ab (vgl. Beispiel 4.7).

In Abbildung 6.4 ist auf der linken Seite der Wert der Bewertungsfunktion (6.2) und auf der rechten Seite die Rechenzeit in Sekunden jeweils abhängig von der Länge des Zeithorizonts dargestellt. Die verschiedenen Kombinationen von  $t_d$  und  $\Delta t$  werden durch unterschiedliche Farben und Symbole gekennzeichnet. Fehlerhafte Iterationen werden durch rote Quadrate auf der  $x$ -Achse dargestellt. Für jeden Zeithorizont wurden die fünf dargestellten Fälle ein Mal simuliert. Somit stehen alle fehlenden Kreuze auf einer senkrechten Linie für einen fehlgeschlagenen Test.

Ein erster Blick auf beide Abbildungen bestärkt die Vermutung, dass mit zunehmender Länge des Zeithorizonts einerseits das Resultat besser wird, aber andererseits auch die Rechenzeit ansteigt. Eine genauere Analyse zeigt einige Ausnahmen von dieser Tendenz. Beispielsweise werden mit einem Zeithorizont von 160 s meist etwas bessere Ergebnisse erzielt als mit 170 oder 180 s. Positiv zu sehen ist, dass bei allen Testfällen mit einem Zeithorizont von mindestens 140 s der Wert der Bewertungsfunktion kleiner als 0,13 ist und es in diesem Bereich keinen fehlerhaften Durchlauf gibt. Generell zeigen die in Abbildung 6.4 dargestellten Ergebnisse, dass eine Wahl von  $t_d = \Delta t$  die stabilsten Ergebnisse liefert. Lediglich bei Zeithorizonten von 100 und 110 s können für  $t_d = \Delta t = 10$  s keine Lösungen gefunden werden. Die zehn bzw. elf erzeugten diskreten Punkte in diesen Fällen sind nicht ausreichend. Wenn  $\Delta t$  größer als  $t_d$  gewählt wird, treten auch bei Zeithorizonten von 120 und 130 s fehlerhafte Testdurchläufe auf.

Bei Betrachtung der rechten Seite von Abbildung 6.4 zeigt sich, dass neben einem längeren Zeithorizont auch kleinere Werte für  $t_d$  und  $\Delta t$  zu längeren Rechenzeiten führen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass mit kleinerem  $t_d$  die Anzahl der diskreten Punkte steigt und mit kleinerem  $\Delta t$  die Anzahl an MPC-Iterationen zunimmt.

Zu diesen Testfällen ist anzumerken, dass die Gewichte mit  $T = 160$  s und  $t_d = \Delta t = 10$  s bestimmt wurden. Dies ist die Ursache für den sehr geringen Wert der Bewer-

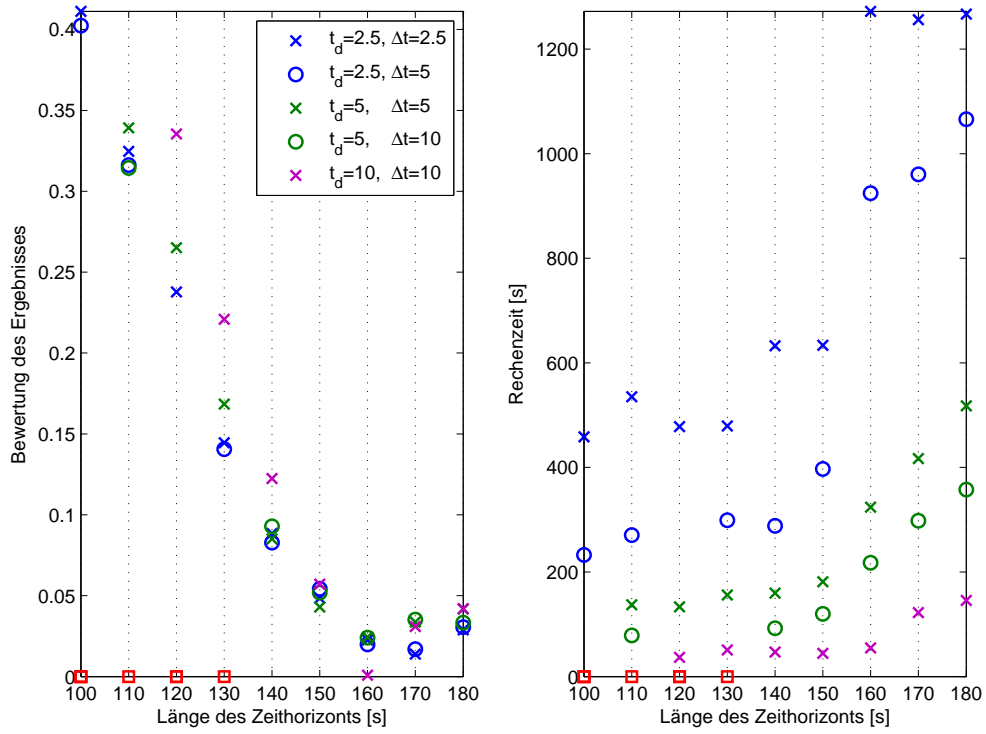


Abbildung 6.4: Entwicklung des Wertes der Bewertungsfunktion und der Rechenzeit bei Variation der Länge des Zeithorizonts sowie der Parameter  $t_d$  und  $\Delta t$  mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Endkosten.

tungsfunktion bei dieser Kombination. Für kürzer werdende Zeithorizonte steigt die Bewertungsfunktion stark an. In den meisten Fällen liefern dabei kleinere Werte für  $t_d$  und  $\Delta t$  bessere Ergebnisse. Vor allem bei längeren Zeithorizonten ist dieser Unterschied jedoch gering und es gibt auch Ausnahmen dieses Trends. Der Unterschied in der Rechenzeit ist dagegen relativ groß. Aus diesem Grund wird auch für die nachfolgenden Untersuchungen bezüglich möglicher Störungen  $t_d = \Delta t = 10$  s gewählt. Um im ungestörten Fall ein möglichst gutes Resultat als Vergleichswert zu haben, wird ein Zeithorizont von 160 s betrachtet.

### Exemplarische Lösung des ungestörten Falls

Abbildung 6.5 zeigt das Resultat bei Anwendung des MPC-Verfahrens mit den soeben bestimmten Parametern:

$$\begin{aligned} w_h = 0,96, \quad w_e = 0,005, \quad w_{entf, Min} = 0,0125, \quad w_{entf, Max} = 0,15, \\ T = 160 \text{ s}, \quad t_d = 10 \text{ s}, \quad \Delta t = 10 \text{ s} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Aufgrund der Wahl von  $t_d = 10$  s werden entsprechend der Länge des Zeithorizonts 17 diskrete Punkte bestimmt. Durch die neun Zustände und eine Steuerung ergeben sich

damit 170 Optimierungsvariablen. Zusätzlich wird die Endzeit als freier Parameter betrachtet. In jeder MPC-Iteration wird somit ein Optimierungsproblem mit 171 Variablen und aufgrund der verschiedenen Beschränkungen mit 473 Nebenbedingungen gelöst. Durchschnittlich wurden dafür im dargestellten Fall 10 *WORHP*-Iterationen pro MPC-Schritt benötigt.

Die Darstellung der Ergebnisse erfolgt analog zu Abschnitt 6.1. Bei der Anwendung des MPC-Verfahrens werden allerdings mehrere optimale Steuerprobleme gelöst. Jeder einzelne Steuerprozess beginnt an einem durch einen farbigen Punkt markierten Anfangswert und wird durch eine teilweise farbige und teilweise graue Kurve fortgesetzt. Dabei wird zwischen den Stützstellen linear interpoliert. Entsprechend dem in Abschnitt 4.3 erläuterten Prinzip wird die Lösung bis zum nächsten Messwert angenommen. Dieser ist farbig dargestellt. Die grauen Kurven zeigen durch das MPC-Verfahren vorhergesagte Verläufe, die in den nächsten Iterationen verworfen werden.

Wie zuvor sind oberhalb der Graphen die entscheidenden Endwerte angegeben. Die Endhöhe weicht nur 6 m von der gewünschten Mindesthöhe ab und der anvisierte Landepunkt wird nur um 280 m verfehlt. Die entsprechend der Endhöhe erlaubte Maximalgeschwindigkeit wird exakt erreicht. Somit wird insgesamt ein sehr gutes Ergebnis erzielt, was auch durch den Wert der Bewertungsfunktion mit  $\theta = 0,0017$  bestätigt wird (vgl. Abbildung 6.4). Zumal durch die Berechnung der Startzustände mit dem Runge-Kutta-Verfahren (vgl. Abschnitt 3.2.2) Abweichungen zur vorhergesagten Lösung entstehen. Diese sind beispielsweise bei den Graphen des Azimut und des Rollwinkels erkennbar. Störungen werden im dargestellten Fall nicht berücksichtigt.

Ein Vergleich mit der Lösung des gesamten optimalen Steuerprozesses (Abbildung 6.2) zeigt bei allen in blau dargestellten Zustandsgrößen einen ähnlichen Verlauf. Aufgrund der deutlich größeren zeitlichen Diskretisierung ist das Ergebnis jedoch nicht so glatt. Dies fällt vor allem bei der in rot dargestellten Steuerung auf. Nichtsdestotrotz stimmt der Wechsel von negativer zu positiver Steuerung und umgekehrt ungefähr mit dem vorherigen Ergebnis überein. Allerdings gibt es nach etwa 140 s noch leichte Schwankungen in  $\ddot{\beta}$ , bevor die Beschleunigung des Rollwinkels konstant bei  $0^\circ \frac{1}{s^2}$  bleibt.

Dieser Unterschied macht sich auch beim Verlauf des Rollwinkels bemerkbar. Zunächst rotiert das Fahrzeug in die eine und anschließend in die andere Richtung. Im Unterschied zur vorherigen Lösung bleibt der Wert aber ab etwa 150 s relativ konstant auf geringem Niveau und geht nicht gegen  $0^\circ$ .

Zudem kann man anhand der grauen Kurven sowohl beim Rollwinkel als auch beim Azimut gut erkennen, dass in den ersten MPC-Iterationen andere Verläufe berechnet werden. Dies ist darauf zurückzuführen, dass aufgrund des verkürzten Zeithorizonts der optimale Verlauf dieser Winkel noch nicht erkennbar ist. Die Berechnung der

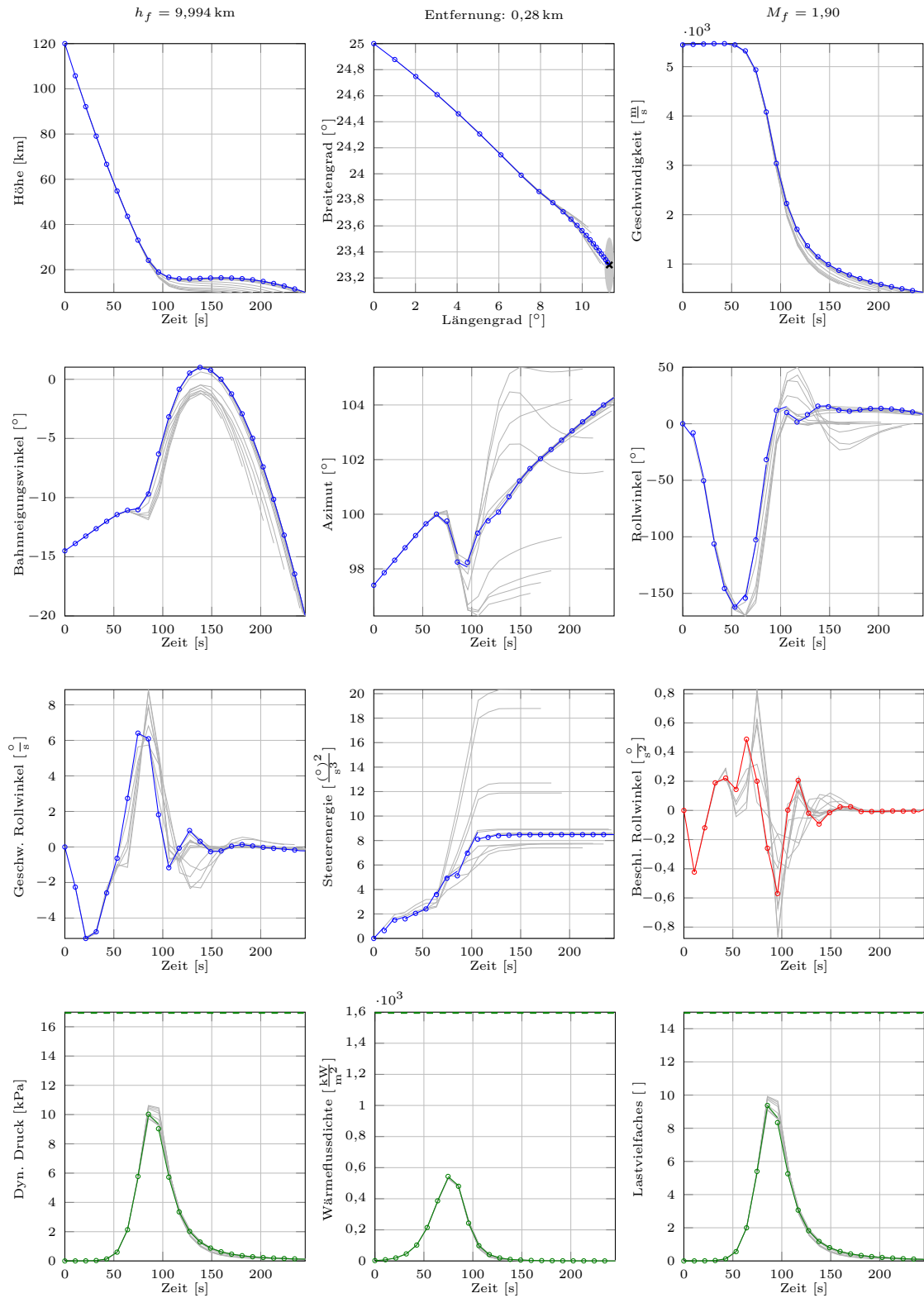


Abbildung 6.5: Exemplarische Lösung des MPC-Verfahrens bei Verwendung der Endkosten mit einem Zeithorizont von 160s und  $t_d = \Delta t = 10 \text{ s}$ . MPC-It.: 23, Rechenzeit: 86s. Pro MPC-Schritt: Diskrete Punkte: 17, Opt.var.: 171, Nebenbed.: 473,  $\emptyset$  WORHP-It.: 10,0.



ersten 60s entspricht etwa dem Verlauf der optimalen Steuerung in Abbildung 6.2. Ab diesem Zeitpunkt wird mit einem Zeithorizont von 160s bereits annähernd bis zum Ende des Prozesses gerechnet. Folglich können die in den ersten MPC-Iterationen berechneten Trajektorien des Rollwinkels und des Azimuts für die zweite Hälfte dieser Phase noch ausreichend korrigiert werden.

In den Graphen für die Höhe und die Geschwindigkeit ist zu erkennen, dass diese Korrektur dazu führt, dass das Fahrzeug später die kritische Höhe von 10 km erreicht und auch die Geschwindigkeit in der letzten Phase höher ist als in den ersten Prädiktionen.

Die Werte der Pfadbeschränkungen liegen etwa im Bereich der Berechnung des gesamten optimalen Steuerprozesses. Die Maximalwerte werden auch in diesem Fall weit unterschritten. Somit wird die berechnete Trajektorie nicht von diesen Beschränkungen beeinflusst. Auch die Dauer der Eintrittsphase entspricht mit knapp 250s etwa dem in Abbildung 6.2 erreichten Wert.

Dieses Ergebnis zeigt, dass das MPC-Verfahren mit Endkosten bei passender Wahl der Parameter geeignet ist, die Bahn bei einem Wiedereintritt zu regeln. Die Endhöhe wird nur geringfügig unterschritten und die Endgeschwindigkeit entspricht genau den Forderungen. Somit kann der Fallschirm in dieser Höhe ohne Bedenken geöffnet und der weitere Verlauf der Mission wie geplant fortgesetzt werden. Da der Zielpunkt in dieser Höhe nur um 280 m verfehlt wurde, kann voraussichtlich auch der anvisierte Landepunkt auf der Marsoberfläche erreicht werden. Allerdings wird dafür mit 160s ein für ein MPC-Verfahren ungewöhnlich langer Zeithorizont benötigt.

### **Beispiel eines kurzen Zeithorizonts**

Wie sich ein deutlich kürzerer Zeithorizont unter den gegebenen Bedingungen auf die Lösung des Wiedereintrittsproblems auswirkt, zeigt Abbildung 6.6. Es wird das detaillierte Ergebnis für die ausgewählten Parameter (6.3) bei einem Zeithorizont von  $T = 120$  s dargelegt. Der Wert der Bewertungsfunktion beträgt 0,34 (vgl. Abbildung 6.4). Es sind also größere Abweichungen der Endwerte zu erwarten. Diese Vermutung wird durch Abbildung 6.6 bestätigt. Der Endwert der Höhe liegt 40 m unter den angestrebten 10 km und damit im akzeptablen Bereich. Allerdings ist die Endgeschwindigkeit mit dem 2,11-fachen der Schallgeschwindigkeit zu hoch, um den Fallschirm in dieser Höhe sicher öffnen zu können. Die berechnete Endzeit liegt mit etwa 182s deutlich unter dem erwarteten Wert. Wenn man die Öffnung des Fallschirms noch einige Sekunden hinauszögern würde, könnte die Geschwindigkeit noch weiter reduziert werden. Aber gleichzeitig würde das Fahrzeug noch tiefer in die Atmosphäre eindringen und damit die Endbedingung der Höhe stärker verletzen.

Der ausgewählte Landepunkt wird um etwas mehr als 55 km verfehlt und liegt damit deutlich außerhalb des gewünschten Landegebietes mit maximal 12,5 km Abwei-

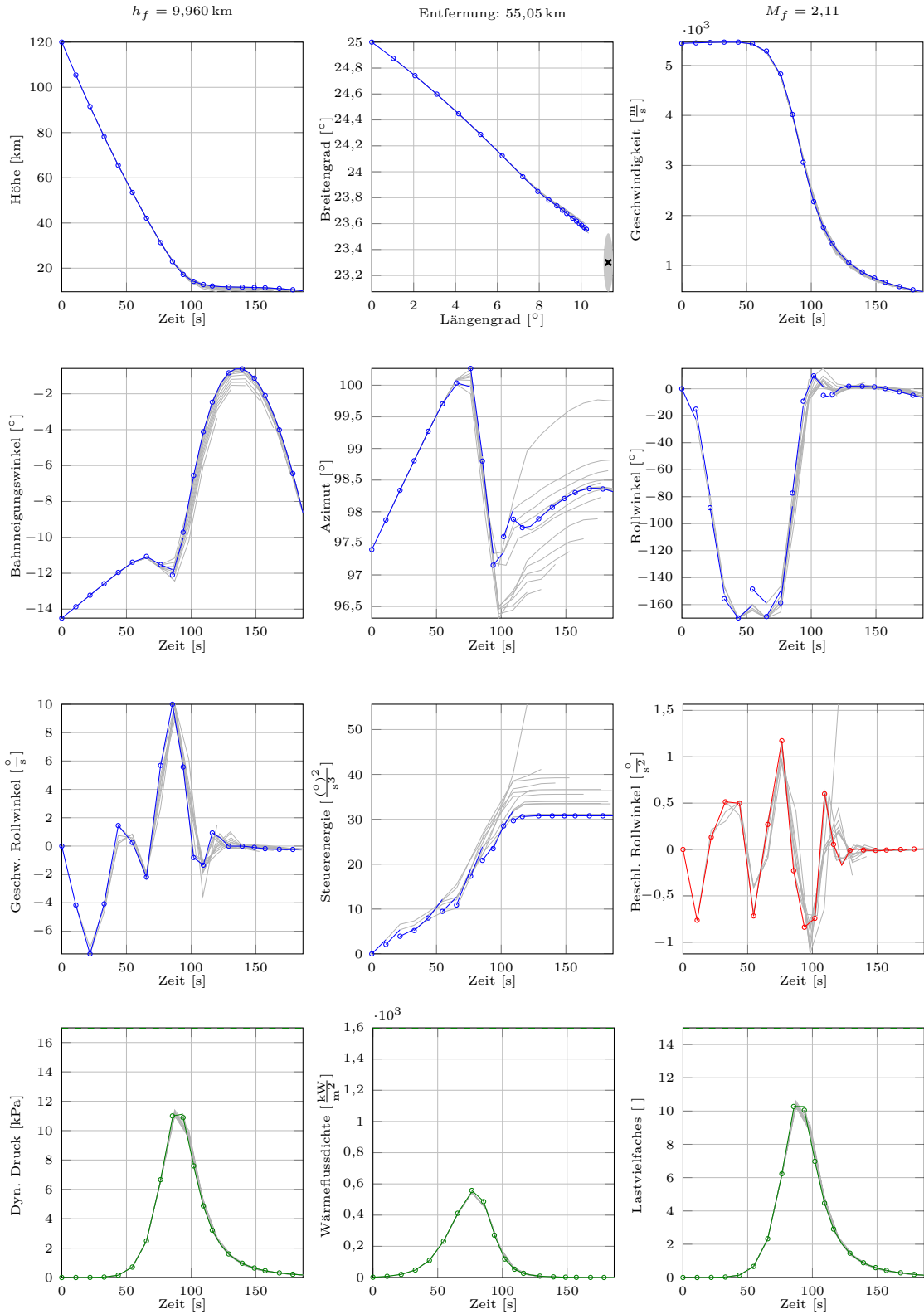


Abbildung 6.6: Lösung des MPC-Verfahrens bei Verwendung der Endkosten mit einem Zeithorizont von 120s und  $t_d = \Delta t = 10 \text{ s}$ . MPC-It.: 19, Rechenzeit: 67s. Pro MPC-Schritt: Diskrete Punkte: 13, Opt.var.: 131, Nebenbed.: 361,  $\phi$  WORHP-It.: 8,1.

chung zum Zielpunkt. Falls sich an der entsprechenden Stelle auf dem Mars große Gesteinsbrocken oder ähnliches befinden, kann auch dieses Kriterium zum Scheitern der Mission führen.

Der Verlauf des Azimut unterscheidet sich von dem in Abbildung 6.5 dargestellten Ergebnis. Der Winkel fällt unter seinen Anfangswert von  $97,4^\circ$  und steigt anschließend nicht so stark wieder an. Man kann erkennen, dass in den vorherigen Iterationen teilweise noch geringere Werte für diesen Winkel berechnet wurden. Es erscheint für kürzere Zeithorizonte sinnvoller, in die gleiche Richtung weiterzufliegen. Dies kann eine Ursache für das Verfehlen des Zielpunktes sein.

Der Verlauf des Rollwinkels zeigt im Vergleich zu Abbildung 6.5 den größten Unterschied nach etwa 60s. Zu diesem Zeitpunkt geht der Wert des Rollwinkels nicht wie im Beispiel des längeren Zeithorizonts schnell wieder gegen  $0^\circ$ , um möglichst viel Auftrieb zu erzeugen, sondern schwankt für etwa 40s um einen Wert von  $-165^\circ$ .

Die Steuerung ist im Vergleich zu Abbildung 6.5 deutlich sprunghafter und nimmt größere Werte an. Daraus resultiert eine fast viermal so hohe Gesamtsteuerenergie wie im Fall des längeren Zeithorizonts (vgl. Abbildung 6.5).

Bei den Pfadbeschränkungen hat sich hingegen nicht viel verändert. Sie nehmen weiterhin keinen Einfluss auf den Verlauf der berechneten Bahn, da alle Variablen weit unter den erlaubten Maximalwerten liegen.

Alles in allem ist die simulierte Lösung mit den Parametern (6.3) und einem Zeithorizont von 120s nicht zufriedenstellend, da das Gelingen der Mission aufgrund der zu hohen Machzahl nicht sichergestellt ist. Die Abweichung von 55 km zum gewünschten Landepunkt ist in diesem Zusammenhang zweitrangig, da sie nicht zwangsläufig zum Scheitern der Mission führt. Der gewählte Zeithorizont ist offenbar zu kurz, um die gewünschten Endzustände erreichen zu können. Eine mögliche Ursache hierfür liegt darin, dass markante Punkte der Trajektorie, wie das Maximum des Bahnneigungswinkels erst nach mehr als 120s auftreten und somit in den ersten MPC-Iterationen nicht berücksichtigt werden können. In Abbildung 6.5 wird deutlich, dass eine Höhe im Bereich von 16 bis 17 km für etwa 100s beibehalten werden kann. Diese Möglichkeit scheint bei dem in Abbildung 6.6 dargestellten Resultat aufgrund des verkürzten Zeithorizonts zu spät erkannt zu werden. In Abschnitt 6.3 wird durch das Verwenden einer Referenztrajektorie eine Alternative vorgestellt, mit der auch bei deutlich kürzeren Zeithorizonten gute Lösungen erzielt werden können.

### 6.2.2 Einfluss verschiedener Störgrößen

Nachdem Gewichtungsfaktoren und MPC-Parameter für das Problem bestimmt sind, wird in diesem Abschnitt die Sensitivität des Verfahrens auf Störungen untersucht. Wie in Abschnitt 5.2.3 erläutert, liegt dabei der Schwerpunkt auf Störungen im Atmosphärenmodell und Abweichungen der Anfangswerte.

### Dünnere Atmosphäre als angenommen

Zunächst wird der Einfluss von Abweichungen im Atmosphärenmodell auf das Ergebnis betrachtet. Abbildung 6.7 zeigt die Lösung des MPC-Verfahrens für Abweichungen der Dichte der Atmosphäre und der Schallgeschwindigkeit im Mittel um  $\mu_{atm} = -20\%$ . Die Zufallsgrößen  $p_\rho$  und  $p_c$  werden aus Gleichung (5.19) mit diesem Wert und einer Standardabweichung von  $\sigma_{atm} = 2\%$  bestimmt. Das bedeutet, etwa 99 % der Abweichungen liegen im Bereich von  $-15$  bis  $-25\%$ . Die entsprechenden Werte der Dichte und der Schallgeschwindigkeit sind in Abbildung 5.3 grün dargestellt. Es wird also der Fall simuliert, dass die Atmosphäre dünner ist als vom Modell angenommen.

Durch eine geringere Dichte erfährt das Fahrzeug weniger Strömungswiderstand und wird somit weniger abgebremst als modelliert. Aus diesem Grund ist die simulierte Geschwindigkeit höher als der vom Modell vorhergesagte Wert. Dies ist auch in Abbildung 6.7 beim Graph oben rechts zu sehen. Zudem ist die tatsächliche Schallgeschwindigkeit geringer als erwartet. Das bedeutet, das Fahrzeug muss in der Realität langsamer sein, um die geforderte Grenze von  $1,9c(h)$  zu erreichen. Auf der Abbildung ist zu sehen, dass das Fahrzeug am Ende der Phase noch mit 2,19-facher Schallgeschwindigkeit fliegt, was zu hoch ist, um den Fallschirm zu öffnen. Zudem ist die geforderte Mindesthöhe von 10 km bereits leicht unterschritten.

Der Verlauf des Azimut und vor allem des Rollwinkels zeigen aber, dass die Auswirkungen der Störung erkannt werden und dass dementsprechend versucht wird, dem Problem entgegenzuwirken. Der Rollwinkel verläuft in kleiner werdenden Schwingungen. Das bedeutet, das Fahrzeug ändert immer wieder die Richtung der Rotation um die Geschwindigkeitsachse und versucht dadurch, auch am Ende der Phase noch möglichst viel kinetische Energie in Wärme umzuwandeln. Entsprechend steigt der Azimut nicht wie im ungestörten Fall nach 100 s monoton an, sondern wechselt ebenfalls häufiger zwischen Zu- und Abnahme. Die Amplitude beträgt in diesem Fall wenige Grad.

Da die Geschwindigkeit zu gering eingeschätzt wird, sind auch die Werte des dynamischen Drucks, der Wärmeflussdichte und des Lastvielfachen höher als vom Modell angenommen. Die erreichten Maximalwerte sind somit ebenfalls höher als im ungestörten Fall. Allerdings wird weiterhin in keinem der drei Fälle die Beschränkung aktiv.

Das Ausgleichen einer Störung von  $-20\%$  im Mittel ist unter den gegebenen Bedingungen also nur eingeschränkt möglich. Im Verlauf des Flugs reagiert der MPC-Regler durch häufiges Ändern der Richtung, in die der Rollwinkel das Fahrzeug rotiert. Allerdings ist die Endgeschwindigkeit mit 2,19-facher Schallgeschwindigkeit zu hoch, um ungefährdet den Fallschirm öffnen zu können. Demnach ist ein erfolgreiches Fortsetzen der Mission nicht sichergestellt.

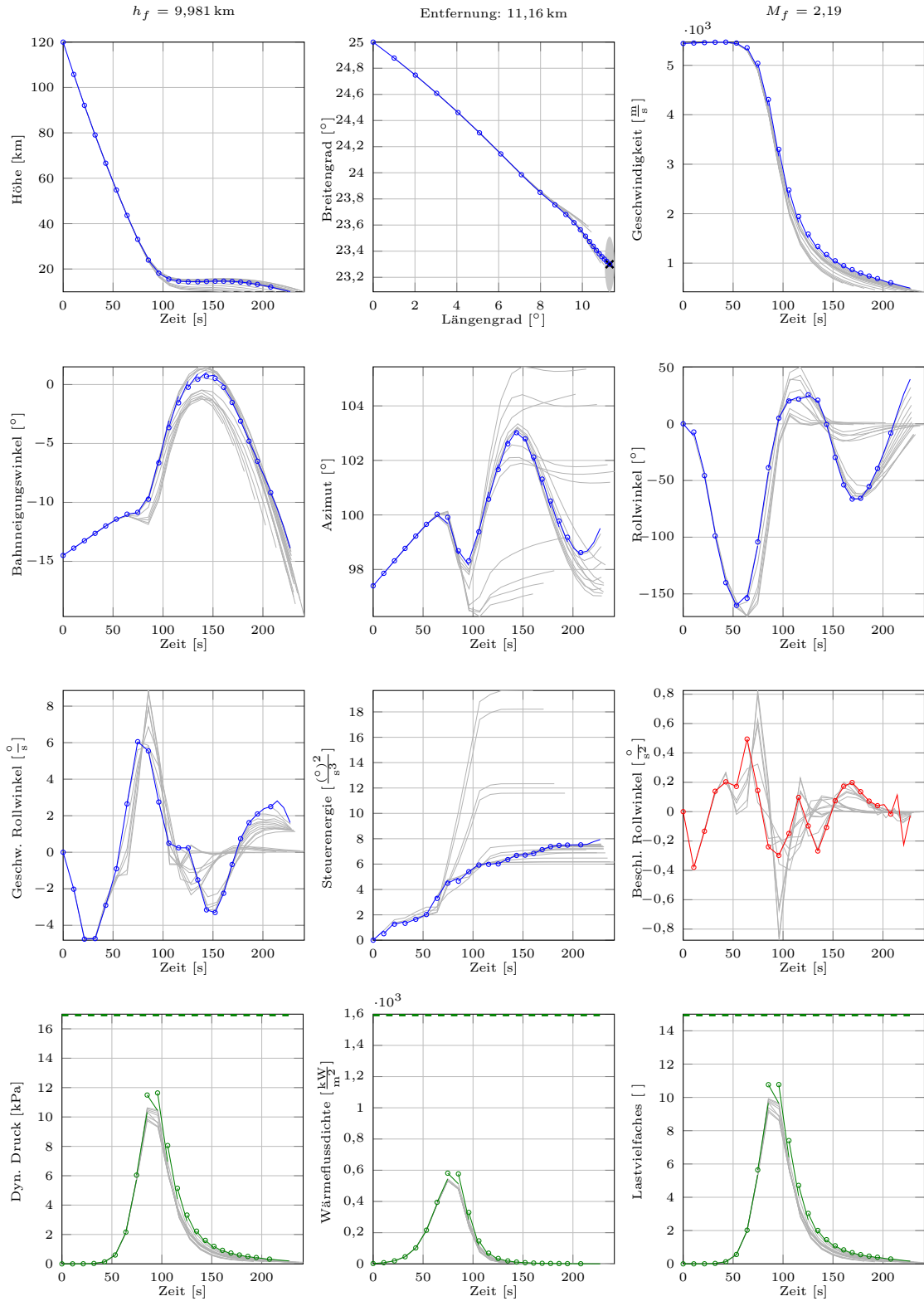


Abbildung 6.7: Abweichung der Atmosphäre von  $-20\%$  im Mittel mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Endkosten mit einem Zeithorizont von 20s und  $t_d = \Delta t = 4s$ . MPC-It.: 22, Rechenzeit: 149s. Pro MPC-Schritt: Diskrete Punkte: 17, Opt.var.: 171, Nebenbed.: 473,  $\phi$  WORHP-It.: 11,6.

### Verschiedene Störungen der Atmosphärendaten

Um allgemeine Aussagen über die Auswirkungen von unterschiedlich starken Abweichungen in den Atmosphärendaten treffen zu können, wird das Wiedereintrittsproblem auch mit anderen mittleren Abweichungen gelöst. In Abbildung 6.8 sind die Ergebnisse der wiederholt durchgeführten Testfälle für Störungen mit einem Mittelwert  $\mu_{atm}$  zwischen  $-40$  und  $10\%$  aufgetragen. Die Standardabweichung  $\sigma_{atm}$  beträgt stets  $2\%$ . Die obere Abbildung zeigt den Endwert der Höhe, wobei der gewünschte Wert von  $10\text{ km}$  durch eine gestrichelte Linie und die erlaubte Abweichung von  $5\%$  durch eine gepunktete Linie dargestellt sind. Der Endwert der Machzahl wird in der mittleren Abbildung aufgetragen, wobei die entsprechenden Grenzen gleichermaßen gekennzeichnet sind. In der unteren Abbildung wird die Entfernung zum Zielpunkt für den jeweiligen Testfall aufgezeigt. Da die Abweichungen der Atmosphärendaten durch eine zufällige Normalverteilung mit dem jeweiligen Mittelwert und der genannten Standardabweichung berechnet werden, werden pro Testfall zehn Wiederholungen durchgeführt. Bei jedem Mittelwert werden zueinander gehörige Endwerte durch gleiche Farben gekennzeichnet.

Die Untersuchungen für eine Störung von  $0\%$  im Mittel entsprechen nicht ganz dem in Abbildung 6.5 dargestellten ungestörten Fall, da durch die Standardabweichung von  $2\%$  kleine Abweichungen in den Atmosphärendaten simuliert werden. Da sich in diesem Fall positive und negative Störungen in etwa ausgleichen, ist der Fehler sehr gering.

Die Ergebnisse der übrigen Testfälle zeigen, dass sowohl die Endhöhe als auch die Machzahl und die Entfernung mit höheren negativen Abweichungen schlechter erreichbar sind. Dies ist darauf zurückzuführen, dass eine dünnere Atmosphäre dazu führt, dass das Fahrzeug weniger abgebremst wird als angenommen. Die maximale Unterschreitung der geforderten Höhe von etwa  $100\text{ m}$  bei einer Störung von  $-40\%$  im Mittel liegt noch im akzeptablen Bereich. Die tolerierte Machzahl von  $2$  wird hingegen bereits bei kleinen negativen Störungen überschritten. Der Fehler steigt dabei mit zunehmender prozentualer Störung im Mittel etwa linear an. Eine zu hohe Geschwindigkeit führt zudem dazu, dass der Zielpunkt überflogen wird. Die Entfernung zum Landepunkt nimmt ebenfalls linear zu (bis ca.  $22$  bis  $25\text{ km}$  bei einer Abweichung von  $-40\%$  im Mittel).

Weiterhin fällt auf, dass die Entfernung zum Zielpunkt auch bei positiven mittleren Störungen ansteigt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass bei einer dickeren Atmosphäre als angenommen das Fahrzeug stärker abgebremst wird. Dadurch können die Bedingungen an Höhe und Geschwindigkeit leichter erfüllt werden, aber gleichzeitig wird nicht so viel Strecke zurückgelegt wie im ungestörten Fall.

Alles in allem zeigen die Untersuchungen, dass eine dünnere Atmosphäre als angenommen vor allem zu Schwierigkeiten bei der Reduzierung der Geschwindigkeit führt. Mit Werten über dem 2-fachen der Schallgeschwindigkeit ist die Endgeschwindigkeit

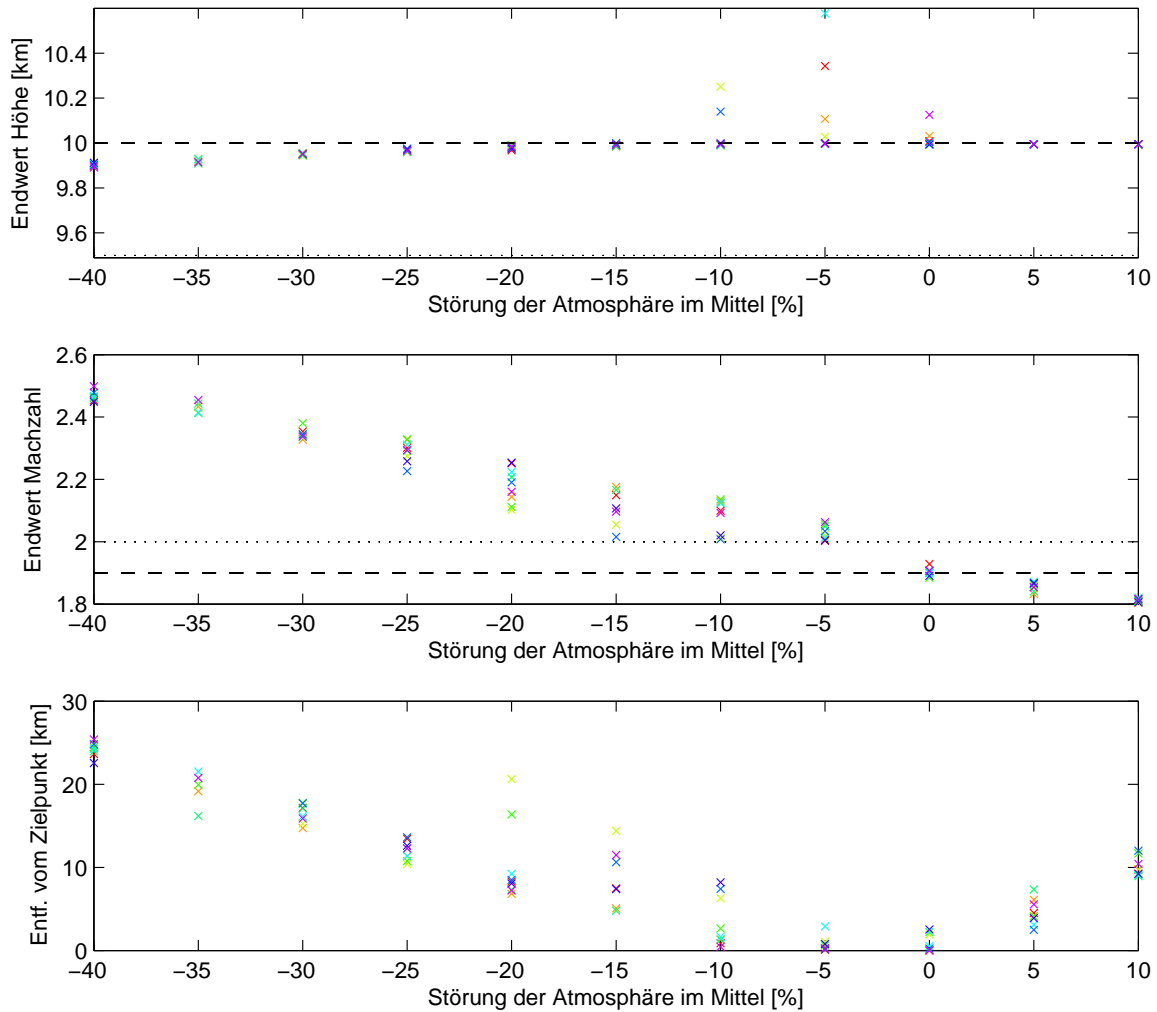


Abbildung 6.8: Endzustände bei verschiedenen mittleren Abweichungen der Atmosphäre mit einer Standardabweichung von 2 % mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Endkosten mit einem Zeithorizont von 20 s und  $t_d = \Delta t = 4$  s.

vor allem bei größeren Störungen deutlich zu hoch, um das Gelingen der Mission zu gewährleisten. Die Endhöhe von 10 km wird hingegen nur um höchstens 100 m unterschritten und liegt somit auch für große Abweichungen der Atmosphärenendaten im akzeptablen Bereich.

### Geringere Eintrittshöhe

Wie in Abschnitt 5.2.3 erläutert, werden neben Störungen, die die Systemdynamik betreffen, auch Abweichungen des Eintrittszenarios betrachtet. Es werden verschiedene Anfangswerte für die Höhe und die Geschwindigkeit untersucht, da dies die entscheidenden Größen beim Wiedereintritt sind.

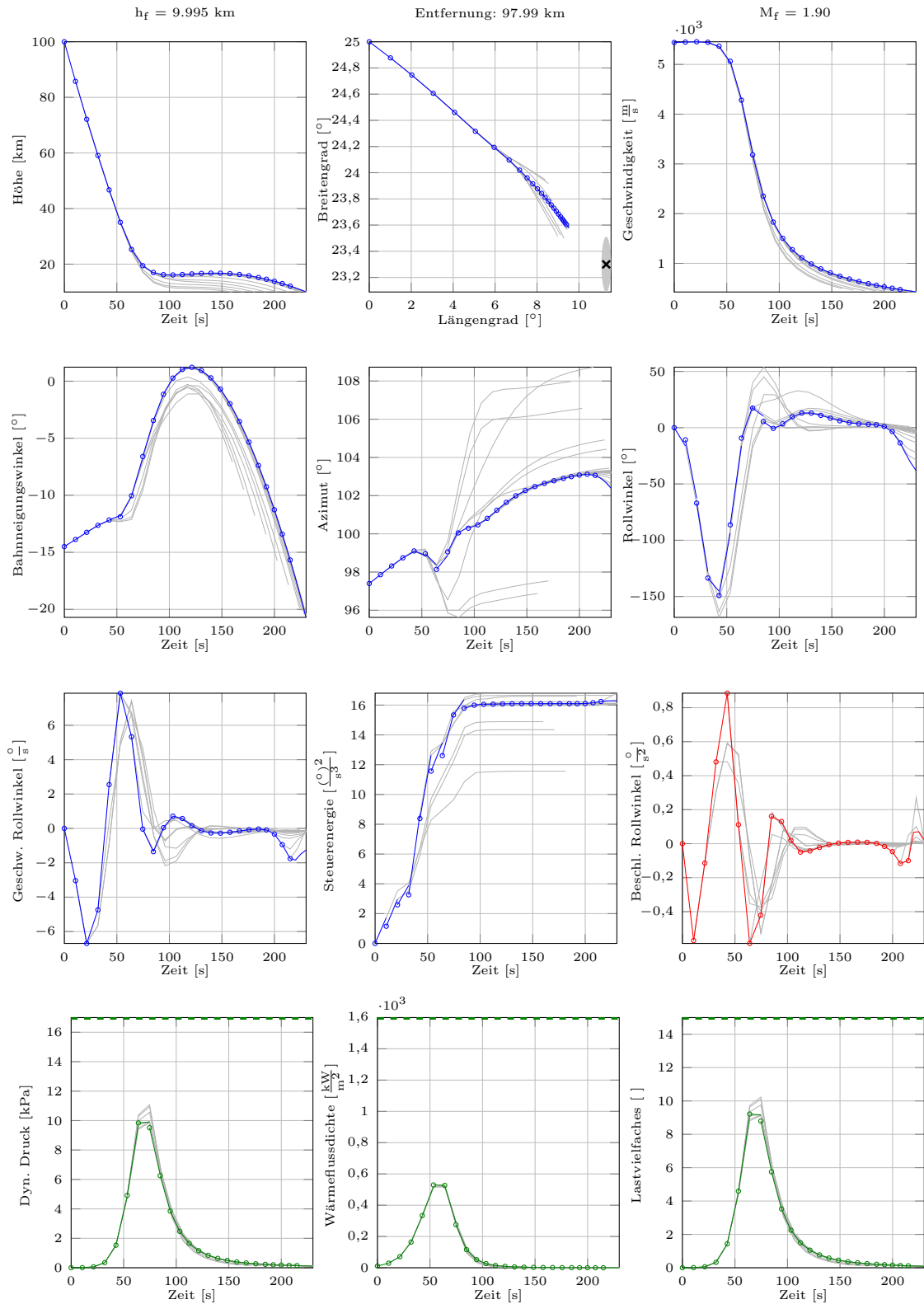


Abbildung 6.9: Eintrittshöhe von 100 km mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Endkosten mit einem Zeithorizont von 160 s und  $t_d = \Delta t = 10$  s. MPC-It.: 24, Rechenzeit: 120 s. Pro MPC-Schritt: Diskrete Punkte: 17, Opt.var.: 171, Nebenbed.: 473,  $\emptyset$  WORHP-It.: 7,4.



In Abbildung 6.9 ist die Lösung des MPC-Verfahrens mit einer tatsächlichen Anfangshöhe von 100 km statt den zuvor angenommenen 120 km dargestellt. Es wird also der Fall simuliert, dass die Atmosphäre des Mars erst in geringerer Höhe beginnt als angenommen. Die Daten des Atmosphärenmodells werden nicht verändert. Dementsprechend ist die Dichte der Atmosphäre zum Zeitpunkt des Wiedereintritts bereits höher als beim Eintritt in 120 km Höhe. Dies führt auch zu einem deutlich größeren Strömungswiderstand  $D$  (vgl. Tabelle 5.2). Die Eintrittsgeschwindigkeit von  $5440,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  wird beibehalten, sodass in dem dargestellten Fall die gleiche Geschwindigkeitsreduktion bei geringerer Höhendifferenz erreicht werden soll.

Die Endwerte über den Graphen in Abbildung 6.9 zeigen, dass die Reduktion der Geschwindigkeit mit einer Unterschreitung der zulässigen Höhe von lediglich 5 m gelingt. Die gewünschte Machzahl wird genau erreicht. Da die Eintrittshöhe so gering ist, bleibt weniger Zeit für diesen Prozess, sodass der Endzustand bereits nach etwa 230 s erreicht wird. Aufgrund des höheren Strömungswiderstands zum Zeitpunkt des Eintritts beginnt die Abnahme der Geschwindigkeit bereits nach ca. 30 s und somit etwa 20 s eher als im ungestörten Fall (vgl. Abbildung 6.5). Die geringere Geschwindigkeit führt dazu, dass die Entfernung zum anvisierten Landepunkt mit 97,99 km groß ist.

Das veränderte Eintrittsszenario wirkt sich auch auf die Winkel aus. Der Rollwinkel ändert seine Richtung eher als im ungestörten Fall und erreicht dadurch nur einen Minimalwert von etwa  $-70^\circ$ . Dies ermöglicht maximalen Auftrieb, um den Höhenverlust so gering wie möglich zu halten. Der Azimut variiert in der letztendlich geflogenen Bahn nur um wenige Grad. In den grau dargestellten vorherigen Iterationen wurden auch andere Verläufe dieses Winkels berechnet, was zu leicht abweichenden Trajektorien führt (oben, mitte).

Aufgrund der geringeren Eintrittshöhe werden die Spitzenwerte der Nebenbedingungen alle etwa 20 s eher erreicht als im ungestörten Fall (vgl. Abbildung 6.5). Vom Betrag her liegen sie im gleichen Bereich und somit deutlich unterhalb der zulässigen Maximalwerte.

Zusammenfassend zeigen die Ergebnisse, dass eine geringere Anfangshöhe als erwartet zwar dazu führt, dass der gewünschte Zielpunkt nicht erreicht wird, aber die Bedingungen zur Öffnung des Fallschirms eingehalten werden können. Die Mission kann somit wie geplant abgeschlossen werden, falls es die Beschaffenheit der Oberfläche des Mars an dem abweichenden Landepunkt zulässt.

### Höhere Eintrittsgeschwindigkeit

Neben Störungen der Eintrittshöhe werden auch Abweichungen der Anfangsgeschwindigkeit untersucht. In Abbildung 6.10 ist das Resultat für eine Anfangsgeschwindigkeit von  $6000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  statt den ansonsten angenommenen  $5440,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  dargestellt.

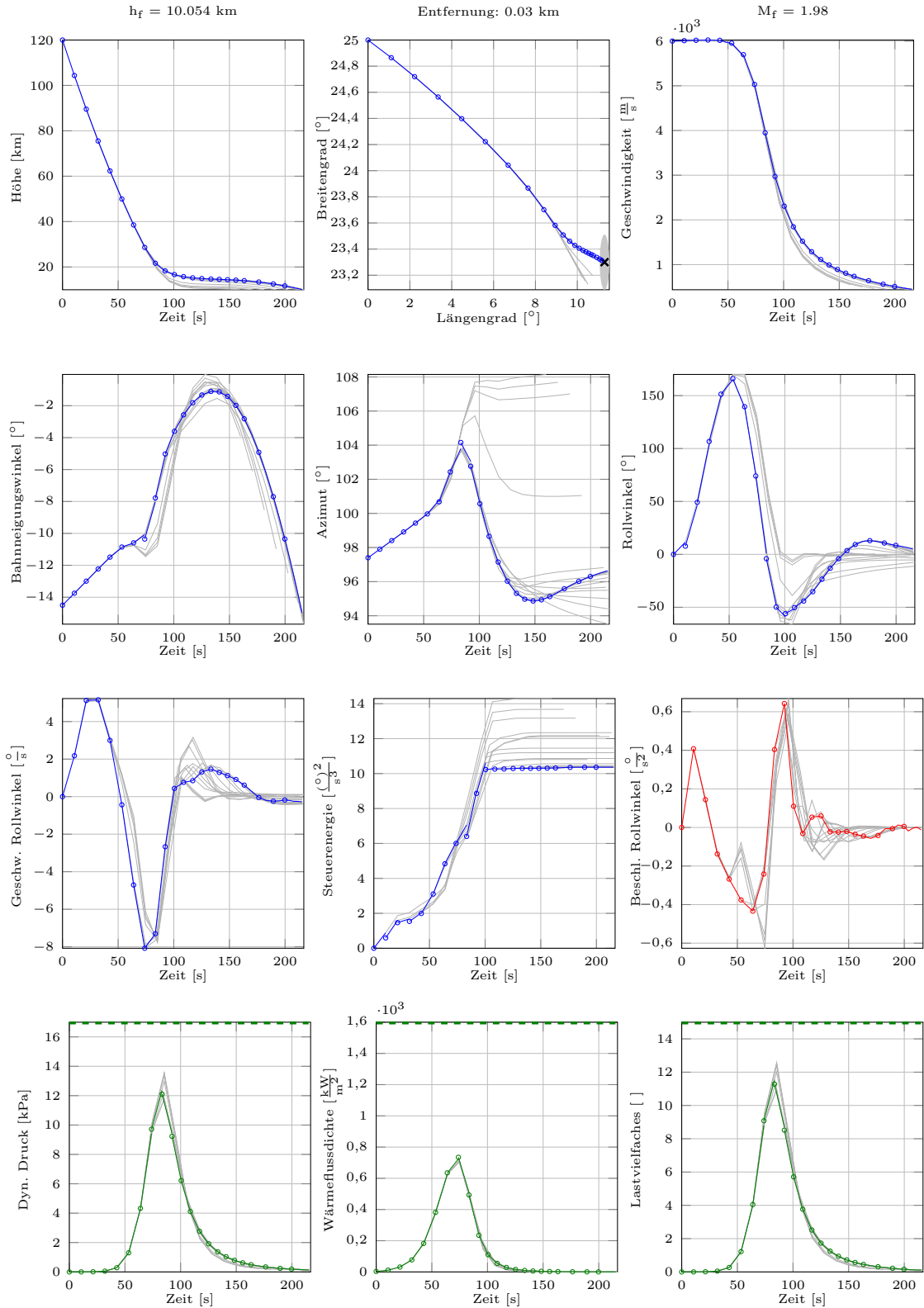


Abbildung 6.10: Eintrittsgeschwindigkeit von  $6000 \frac{m}{s}$  mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Endkosten mit einem Zeithorizont von 160s und  $t_d = \Delta t = 10s$ . MPC-It.: 22, Rechenzeit: 123s. Pro MPC-Schritt: Diskrete Punkte: 17, Opt.var.: 171, Nebenbed.: 473,  $\emptyset$  WORHP-It.: 20,6.

Die Endwerte der Zustände zeigen, dass die Bedingung für die Höhe eingehalten wird, der Landepunkt mit sehr geringer Abweichung erreicht wird und die Geschwindigkeit mit dem 1,98-fachen der Schallgeschwindigkeit im akzeptablen Bereich liegt. In der dargestellten Situation wird simuliert, dass das Fahrzeug beim Atmosphäreneintritt etwa  $560 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  schneller ist als erwartet. In 10 km Höhe ist es mit  $447 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  noch knapp  $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  zu schnell. Der größte Teil der zusätzlichen Energie im Vergleich zum ungestörten Fall (vgl. Abbildung 6.5) kann demnach in Wärme umgewandelt werden. Tabelle 5.2 hat deutlich gemacht, dass der Strömungswiderstand bei höherer Eintrittsgeschwindigkeit nur geringfügig ansteigt. Die Geschwindigkeitsreduktion ist somit hauptsächlich auf eine dem Problem angepasste Steuerung des Fahrzeugs zurückzuführen.

Die abweichende Steuerung bewirkt einen anderen Verlauf des Rollwinkels und des Azimut. Dadurch ergibt sich eine Flugbahn, die nicht so direkt verläuft wie im ungestörten Fall. Die grauen Linien zeigen, dass in den ersten Iterationen vor allem durch andere Verläufe des Azimut leicht abweichende Flugbahnen berechnet wurden, bei denen die Entfernung zum Zielpunkt größer war.

Die Dauer des Manövers beträgt in diesem Fall nur etwa 215s, also etwa eine halbe Minute weniger als im ungestörten Fall. Die Ursache liegt darin, dass vor allem zu Beginn der Eintrittsphase auf Grund der deutlich höheren Geschwindigkeit mehr Weg zurückgelegt wird. Dadurch sinkt das Fahrzeug auch schneller, sodass die Höhe nur eine begrenzte Zeit über den geforderten 10 km gehalten werden kann.

Durch die höhere Anfangsgeschwindigkeit ist mehr kinetische Energie im System vorhanden, die in Wärme umgewandelt werden muss. Dies wirkt sich auf die Pfadbeschränkungen aus. Der Spitzenwert der Wärmeflussdichte liegt etwa 28 % über dem Wert des ungestörten Testfalls (vgl. Abbildung 6.5). Auch die Maximalwerte des dynamischen Drucks und des Lastvielfachen steigen mit etwa 22 bzw. 23 % merklich an. Jedoch liegen weiterhin alle Werte unter der Beschränkung, sodass die gewählte Trajektorie nicht von den Pfadbeschränkungen beeinflusst ist.

Insgesamt ist das Ergebnis dieses Testfalls zufriedenstellend. Die Geschwindigkeit konnte zwar nicht auf den gewünschten Wert reduziert werden, der Fehler liegt aber unter der tolerierten 5 %-Grenze. Da zudem die Endbedingung für die Höhe eingehalten und der Landepunkt erreicht wird, kann die Mission voraussichtlich trotz der höheren Eintrittsgeschwindigkeit erfolgreich abgeschlossen werden.

### **Kombination verschiedener Eintrittshöhen und Eintrittsgeschwindigkeiten**

Die Abbildungen 6.9 und 6.10 veranschaulichen detailliert zwei Fälle von Abweichungen in den Anfangswerten. Im Folgenden werden die Ergebnisse bei unterschiedlichen Anfangshöhen mit unterschiedlichen Anfangsgeschwindigkeiten analysiert. Wie in Abschnitt 5.2.3 erläutert, werden Eintrittshöhen im Bereich von 100 bis 130 km und Eintrittsgeschwindigkeiten von  $5000$  bis  $6500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  untersucht.

In Abbildung 6.11 sind alle Resultate für die Kombinationen der unterschiedlichen Höhen und Geschwindigkeiten dargestellt. Die Höhe des auf der z-Achse aufgetragenen Wertes der Bewertungsfunktion (6.2) wird durch eine farbliche Kennzeichnung unterstützt. Der in Abbildung 6.5 dargestellte ungestörte Fall ist in Abbildung 6.11 auch berücksichtigt. Dieser zur Höhe von 120 km und Geschwindigkeit von  $5440,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  gehörende Wert der Bewertungsfunktion ist erwartungsgemäß sehr gering.

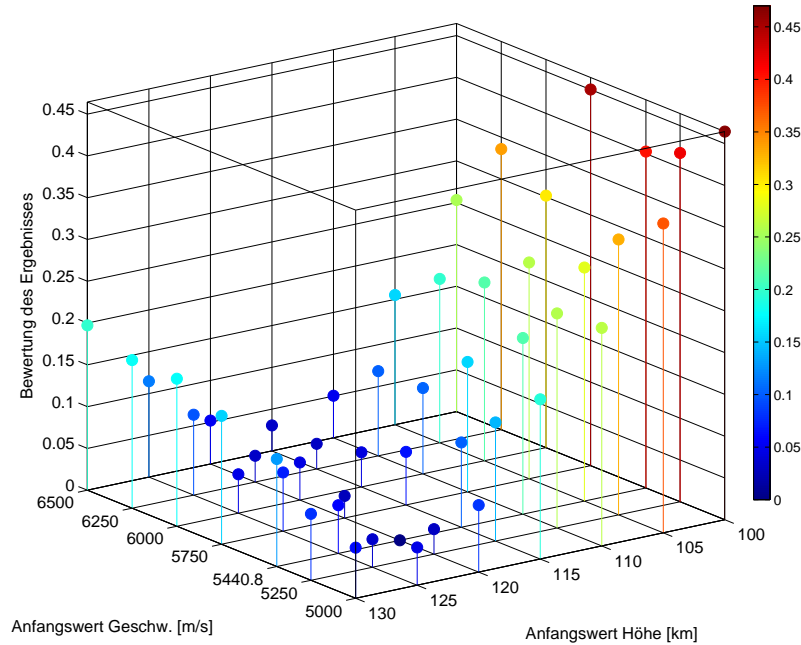


Abbildung 6.11: Wert der Bewertungsfunktion bei verschiedenen Eintrittshöhen und Eintrittsgeschwindigkeiten mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Endkosten mit einem Zeithorizont von 20 s und  $t_d = \Delta t = 4$  s.

Auffallend ist, dass mit abnehmender Höhe der Wert der Bewertungsfunktion deutlich stärker ansteigt als mit höherer Anfangsgeschwindigkeit. Die genaue Analyse des Testfalls bei einer Eintrittshöhe von 100 km bei normaler Eintrittsgeschwindigkeit (vgl. Abbildung 6.9) hat gezeigt, dass der Fehler fast ausschließlich von der Entfernung zum Zielpunkt herrührt. Die Endbedingungen an Höhe und Geschwindigkeit werden selbst bei diesem Fall der geringsten getesteten Anfangshöhe eingehalten. Die Analyse eines Testfalls mit einer Eintrittsgeschwindigkeit von  $6000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und der normalen Eintrittshöhe (vgl. Abbildung 6.10) hat gezeigt, dass in diesem Fall die zu hohe Endgeschwindigkeit den größten Beitrag zum Fehler leistet. Dies ist auch für die anderen untersuchten Anfangsgeschwindigkeiten zu vermuten. Diese Abweichungen sind bezogen auf die gewünschte Machzahl von 1,9 verhältnismäßig kleiner als Entfernungen zum Zielpunkt von bis zu 100 km, welche mit 250 skaliert werden (vgl. Gleichung (6.2)). Aus diesem Grund treten die größten Werte der Bewertungsfunktion bei geringen Anfangshöhen auf.

Obwohl die Störungen bei geringer Anfangshöhe und hoher Anfangsgeschwindigkeit am größten sind, ist der Fehler in diesem Fall nicht am größten. Die Analyse von Abbildung 6.9 hat gezeigt, dass die große Entfernung vom gewünschten Zielpunkt darauf zurückzuführen ist, dass aufgrund der geringeren Eintrittshöhe weniger Zeit bis zur Öffnung des Fallschirms verbleibt. Durch eine höhere Geschwindigkeit kann jedoch auch in dieser kürzeren Zeit eine längere Strecke zurückgelegt werden. Aus diesem Grund ist die Abweichung vom Zielpunkt nicht so hoch wie bei einer geringen Anfangshöhe und Anfangsgeschwindigkeit. Durch die höhere Geschwindigkeit ist ein Anstieg des Fehlers in den Endbedingungen zu erwarten. Wie in Abbildung 6.11 zu sehen, ist für die Bewertungsfunktion der Gewinn an Entfernung zum Zielpunkt jedoch größer als der Verlust durch die Verletzung der Endbedingungen, sodass im Fall von geringen Eintrittshöhen und hohen Eintrittsgeschwindigkeiten nicht die schlechtesten Ergebnisse erzielt werden.

Abschließend lässt sich festhalten, dass der MPC-Regler auch mit leicht abweichenden Anfangswerten eine Steuerung findet, die zu guten Ergebnissen führt. Allerdings wurde bei allen in diesem Abschnitt betrachteten Störungen ein Zeithorizont von 160 s verwendet, da bei kürzeren Zeithorizonten die Ergebnisse bereits im ungestörten Fall deutlich schlechter waren. Im folgenden Abschnitt wird durch das Verwenden einer Referenztrajektorie im Zielfunktional eine Möglichkeit untersucht, mit deutlich kürzeren Zeithorizonten ähnlich gute Resultate zu erzielen.

## 6.3 Ergebnisse mit Referenztrajektorie

Ein anderer Ansatz der modellprädiktiven Regelung zur Lösung des Wiedereintrittproblems ist die Verwendung einer Referenztrajektorie. Wie in Abschnitt 5.2.1 erläutert, wird auf dem aktuellen Zeithorizont jeweils der Abstand der Zustände zu den zugehörigen Referenzwerten minimiert. Als Referenztrajektorie wird die in Abbildung 6.2 dargestellte Lösung verwendet. Da diese Lösung die gewünschten Endbedingungen für die Höhe und die Geschwindigkeit erfüllt und zudem den anvisierten Landeplatz erreicht, ist durch die Verwendung dieser Trajektorie die Verfolgung der gewünschten Ziele sichergestellt.

### 6.3.1 Systematische Untersuchung der Parameter

#### Gewichtungsfaktoren im Zielfunktional

In Abschnitt 5.2.1 werden die Zielfunktionale  $\Phi_{mpc_1}$  und  $\Phi_{mpc_2}$  (vgl. Gleichungen (5.16) und (5.17)) eingeführt. Im ersten Fall wird die Zeit als Referenzgröße und im anderen Fall die Geschwindigkeit verwendet. Zu beiden Varianten werden numerische Untersuchungen durchgeführt. Die in den Zielfunktionalen (5.16) und (5.17)

auftretenden Gewichtungparameter werden dabei zunächst als zeitlich konstant angenommen. Außerdem wird für die Geschwindigkeit als Referenzgröße eine unstetige zeitliche Gewichtung untersucht. Dabei werden die Parameter  $w_h(\tau)$ ,  $w_\lambda(\tau)$ ,  $w_\varphi(\tau)$ ,  $w_\gamma(\tau)$  und  $w_\chi(\tau)$  für  $\tau < T$  auf null gesetzt und für den letzten Wert des aktuellen Prädiktionshorizonts gilt jeweils

$$0 < w_h(T), w_\lambda(T), w_\varphi(T), w_\gamma(T), w_\chi(T) < 1.$$

Es ergeben sich somit also drei mögliche Varianten für den Umgang mit der Referenztrajektorie. Bei allen drei Varianten können die Endbedingungen mit passender Wahl der Gewichtungparameter im ungestörten Fall erfüllt werden. Aufgrund der Informationen, die die Referenztrajektorie liefert, ist dies auch mit einem kurzen Zeithorizont möglich.

Abbildung 6.12 zeigt beispielhaft bei Verwendung der Geschwindigkeit als Referenz und nur der Gewichtung des Wertes zum Endzeitpunkt  $T$  die erzielten Resultate für verschiedene Gewichtungsfaktoren. Dazu wird ein Prädiktionshorizont von 20s verwendet. Für den zeitlichen Abstand zwei diskreter Punkte  $t_d$  und für die Zeit bis zur nächsten MPC-Iteration werden 4s gewählt. Die untersuchten Werte für  $w_\lambda$  sind auf der  $x$ -Achse, für  $w_\varphi$  auf der  $y$ -Achse und für  $w_\chi$  auf der  $z$ -Achse dargestellt. Die Parameter  $w_h$  und  $w_e$  variieren auf den einzelnen Teilabbildungen, wobei  $w_h$  nach unten und  $w_e$  nach rechts zunimmt. Die Farbe der Punkte gibt den Wert der Bewertungsfunktion (6.2) an. Ergebnisse, bei denen der Wert der Bewertungsfunktion größer als 0,05 ist, werden durch ein gelbes Quadrat gekennzeichnet.

Abbildung 6.12 lässt kaum allgemeingültige Aussagen über den Einfluss einzelner Gewichtungparameter zu. Es fällt jedoch auf, dass die schlechtesten Ergebnisse häufig bei einer Wahl von  $w_\chi = 0,01$  auftreten. Für gute Ergebnisse (blaue Punkte) ist hingegen keine klare Tendenz erkennbar. Aus diesem Grund wurden einige dieser guten Resultate hinsichtlich der genauen Endwerte von Höhe, Machzahl und der Entfernung zum Zielpunkt miteinander verglichen. Zudem wurde das Verhalten bei Störungen in diese Vergleiche einbezogen. Diese Analyse hat ergeben, dass mit

$$\begin{aligned} w_{ref,v}(T) &= 0,8, & w_e(T) &= 0,2 \\ w_h(T) &= 0,6, & w_\lambda(T) &= 0,05, & w_\varphi(T) &= 0,1, & w_\gamma(T) &= 0,15, & w_\chi(T) &= 0,1 \end{aligned} \tag{6.4}$$

und einem Zeithorizont von 20s das Verfahren sehr gute Ergebnisse liefert.

Für die anderen beiden Varianten mit konstanter Gewichtung der Parameter wurde analog vorgegangen. Für das Verfahren mit Zeit als Referenzgröße führt die Wahl von

$$\begin{aligned} w_{ref,t}(\tau) &= 0,8, & w_e(\tau) &= 0,2 \\ w_h(\tau) &= 0,4, & w_\lambda(\tau) &= 0,05, & w_\varphi(\tau) &= 0,01, & w_v(\tau) &= 0,3, & w_\gamma(\tau) &= 0,14, & w_\chi(\tau) &= 0,1 \end{aligned}$$

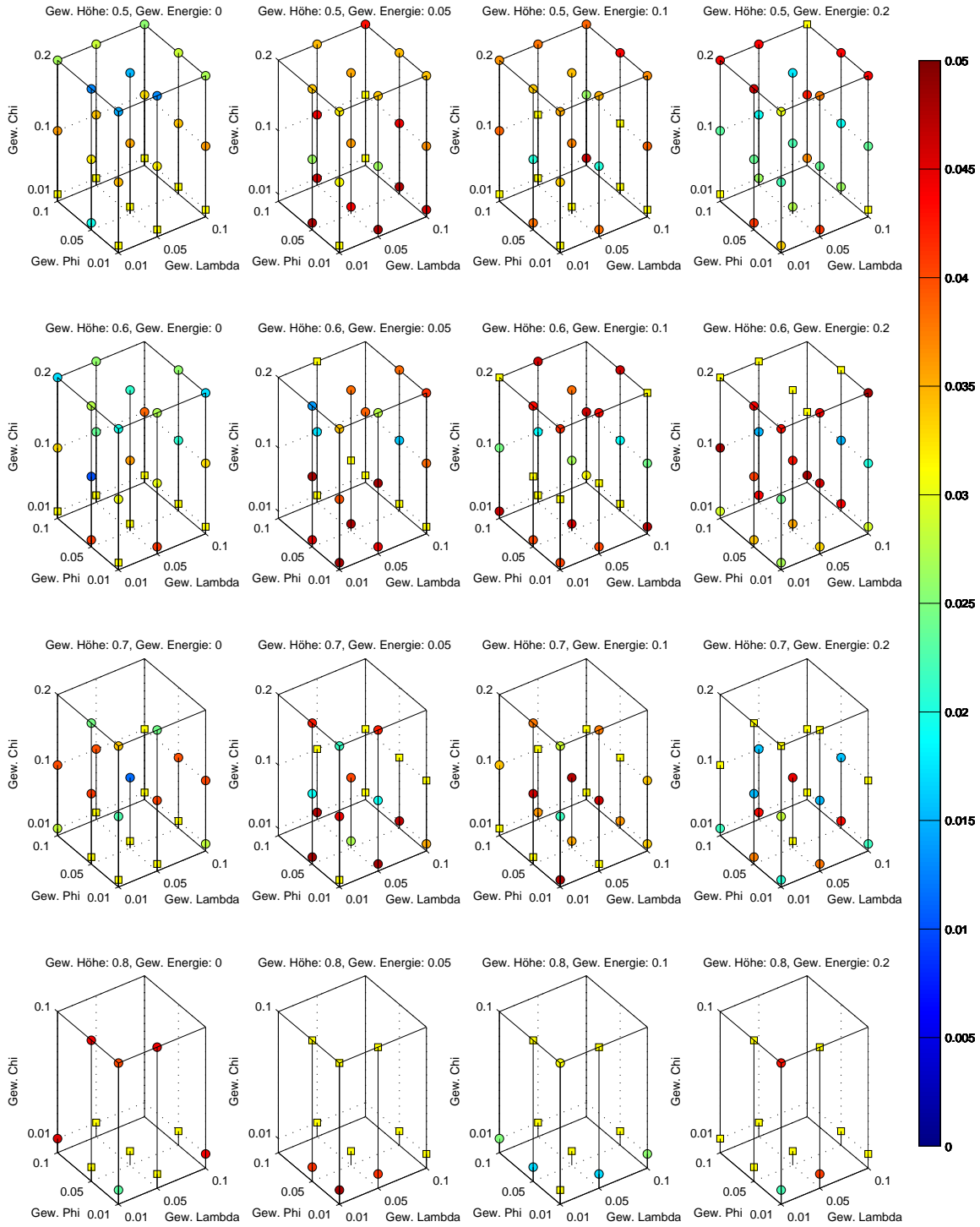


Abbildung 6.12: Variation der Gewichtsparameter  $w_h$ ,  $w_e$ ,  $w_\lambda$ ,  $w_\varphi$  und  $w_\chi$  bei einem Zeithorizont von 20s und  $t_d = \Delta t = 4$ s mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Geschwindigkeit als Referenzgröße.

mit  $\tau \in [0, T]$  auf gute Resultate. Für die Geschwindigkeit als Referenzgröße und konstante Gewichtung hat sich die Wahl von

$$w_{ref, V}(\tau) = 0,9, \quad w_e(\tau) = 0,1 \\ w_h(\tau) = 0,6, \quad w_\lambda(\tau) = 0,1, \quad w_\varphi(\tau) = 0,05, \quad w_\gamma(\tau) = 0,05, \quad w_\chi(\tau) = 0,2$$

mit  $\tau \in [0, T]$  bewährt.

### Varianten des Zielfunktionalis

Bei Wahl der dargelegten jeweils besten Gewichtungparameter kann für alle drei Varianten im ungestörten Fall mit einem Prädiktionshorizont von 20s eine sehr gute Lösung gefunden werden. Die Mindesthöhe von 10 km wird nicht unterschritten, die Machzahl von 1,9 erreicht und der gewünschte Landepunkt in allen Fällen nur um wenige Kilometer verfehlt (vgl. Abbildung 6.15 und Abbildungen A.6 und A.7 im Anhang). Um beurteilen zu können, welche Variante sich am besten für das Wiedereintrittsproblem eignet, werden die Resultate bei verschiedenen Anfangshöhen und Anfangsgeschwindigkeiten untersucht. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.13 dargestellt. Es werden Eintrittshöhen zwischen 100 und 130 km (links) und Eintrittsgeschwindigkeiten zwischen 5000 und 6500  $\frac{m}{s}$  (rechts) betrachtet. Das Ergebnis wird jeweils in Form des Endwertes der Höhe (oben), des Endwertes der Machzahl (mitte) und der Entfernung zum Zielpunkt (unten) angegeben. Die Endbedingungen von 10 km und 1,9-facher Schallgeschwindigkeit sind durch eine gestrichelte Linie gekennzeichnet. Die gepunktete Linie gibt eine Abweichung von 5 % an. Die Verwendung der Zeit als Referenzgröße ist blau, die Geschwindigkeit mit konstanten Gewichtungsparemtern grün und mit ausschließlicher Gewichtung des letzten Zeitpunktes rot dargestellt.

Der Endwert der Höhe bewegt sich bei allen betrachteten Eintrittshöhen bei Verwendung der Geschwindigkeit als Referenzgröße zwischen 9,7 und 10,1 km. Bei Verwendung der Zeit als Referenzgröße wirken sich geringere Eintrittshöhen dagegen stärker aus und führen zu größeren Abweichungen von der gewünschten Endhöhe. Auch der Endwert der Geschwindigkeit ist bei geringer Eintrittshöhe für die Variante der Zeit als Referenzgröße am höchsten. Dies ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass bei niedrigeren Eintrittshöhen die Geschwindigkeit schneller reduziert werden muss und somit der von der Referenztrajektorie angenommene zeitliche Verlauf des Wiedereintrittmanövers nicht sinnvoll ist. Bei Verwendung der Geschwindigkeit als Referenzgröße ist die Prozesszeit hingegen variabler.

Zwischen den verschiedenen Gewichtungen bei Verwendung der Geschwindigkeit als Referenz sind bei unterschiedlichen Eintrittshöhen nur geringe Unterschiede in den Resultaten festzustellen. Der Endwert der Höhe ist bei einer konstanten Gewichtung besser, wohingegen eine Endgewichtung ein besseres Ergebnis der Machzahl liefert.



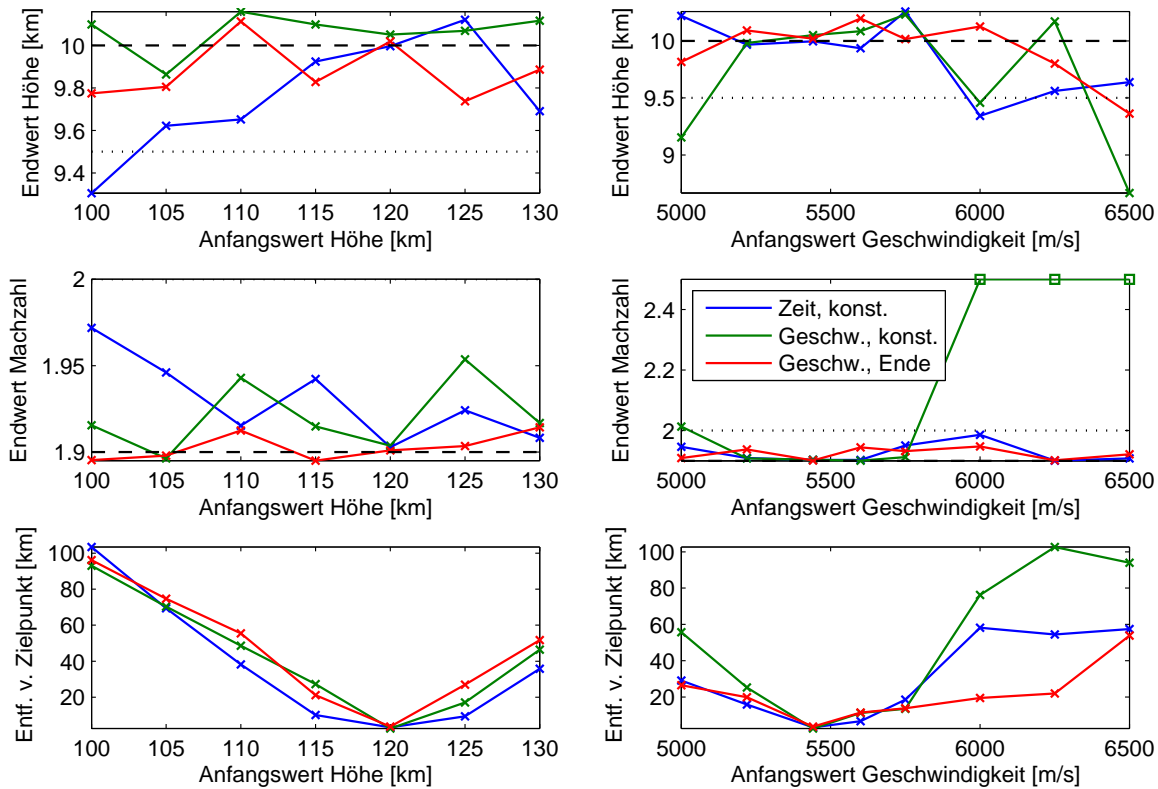


Abbildung 6.13: Endzustände bei unterschiedlichen Eintrittshöhen und Eintrittsgeschwindigkeiten bei Verwendung der Referenztrajektorie mit Zeit bzw. Geschwindigkeit als Referenzgröße und unterschiedlichen Gewichtungen mit einem Zeithorizont von 20 s und  $t_d = \Delta t = 4$  s.

Für die Entfernung zum Zielpunkt zeigen alle drei Graphen einen ähnlichen Verlauf. Die Abweichung ist mit bis zu 100 km bei einer Eintrittshöhe von 100 km in allen Fällen sehr hoch und steigt etwa linear an.

Bei der Analyse der Ergebnisse verschiedener Eintrittsgeschwindigkeiten, die auf der rechten Seite von Abbildung 6.13 dargestellt sind, zeigt sich, dass es bei sehr hohen Anfangsgeschwindigkeiten schwierig ist, die gewünschten Endbedingungen zu erfüllen. Bei Verwendung der Zeit als Referenz wird die akzeptierte Höhe von 9,5 km für besonders geringe und besonders hohe Eintrittsgeschwindigkeiten unterschritten. Auch für die Variante der Geschwindigkeit als Referenz mit konstanter Gewichtung liegen die Endwerte der Höhe ab einer Anfangsgeschwindigkeit von 6000  $\frac{m}{s}$  etwa bei diesem Grenzwert. Bei ausschließlicher Endgewichtung liegt der Fehler hingegen nur bei der höchsten Anfangsgeschwindigkeit etwas über den tolerierten 5 %.

Bei konstanter Gewichtung und der Geschwindigkeit als Referenz (grün) führen besonders hohe Eintrittsgeschwindigkeiten dazu, dass die gewünschte Machzahl stark überschritten wird. Um auch die Resultate der anderen beiden Varianten im Graph

erkennen zu können, werden Werte über 2,5 durch ein Quadrat gekennzeichnet. In den beiden anderen Fällen wird die akzeptierte Grenze von 2 nicht überschritten, wobei der größte Fehler für eine Eintrittsgeschwindigkeit von  $6000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  bei Verwendung der Zeit als Referenz auftritt.

Die Entfernung zum Zielpunkt steigt mit wenigen Ausnahmen mit zunehmenden Eintrittsgeschwindigkeiten an. Dabei liefert die ausschließliche Gewichtung der Endwerte (rot) für höhere Anfangsgeschwindigkeiten deutlich geringere Abweichungen vom Zielpunkt als die anderen beiden Varianten.

Alles in allem werden bei Verwendung der Geschwindigkeit als Referenzgröße mit Endgewichtung die zuverlässigsten Resultate erzielt. Im Gegensatz zu den anderen beiden getesteten Varianten gibt es weder bei unterschiedlichen Eintrittshöhen noch bei den Eintrittsgeschwindigkeiten schwere Verletzungen der Endbedingungen. Zudem ist die Entfernung zum Zielpunkt in der Regel nicht höher als in den anderen Fällen. Aus diesem Grund werden die folgenden Untersuchungen mit dieser Variante durchgeführt.

### **Länge des Zeithorizonts**

Analog zu den Betrachtungen bei Verwendung der Endkosten wird auch im Fall der Referenztrajektorie der Einfluss des Zeithorizontes sowie der Parameter  $t_d$  und  $\Delta t$  auf das Ergebnis und die benötigte Rechenzeit untersucht. Es wird ein Zeithorizont zwischen 10 und 40 s, ein Zeitabstand zwischen zwei Stützstellen zwischen 2 und 6 s und für die Zeit zwischen zwei MPC-Iterationen entweder der einfache oder der doppelte Wert von  $t_d$  betrachtet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.14 dargestellt. Rote Quadrate auf der x-Achse symbolisieren fehlerhafte Testdurchläufe.

Es fällt auf, dass für alle Testfälle mit  $t_d = \Delta t$  Resultate erzielt werden konnten. Wenn  $\Delta t = 2t_d$  gewählt wird, treten bis auf einen Fall (grüner Kreis) bzw. drei Fälle (blauer Kreis) immer Iterationen auf, in denen der NLP-Löser keine Lösung findet, sodass der Algorithmus abgebrochen wird. Für  $t_d = \Delta t$  gilt bei Zeithorizonten von weniger als 20 s erwartungsgemäß, dass der Wert der Bewertungsfunktion mit kürzerem Zeithorizont zunimmt und die schlechtesten Ergebnisse bei der größten Diskretisierung mit  $t_d = 6$  s erzielt werden. Bei Zeithorizonten zwischen 25 und 40 s sind diese beiden Zusammenhänge nicht mehr so klar festzustellen, was vermutlich darauf zurückzuführen ist, dass die verwendeten Gewichtungsparameter mit  $T = 20$  s und  $t_d = \Delta t = 4$  s bestimmt wurden.

Die Rechenzeit ist erwartungsgemäß bei der größten Diskretisierung mit  $t_d = 6$  s am geringsten. Für  $t_d = 4$  s dauert die Berechnung bei allen betrachteten Zeithorizonten etwa 20 s länger. In beiden Fällen ist ein leichter Anstieg bei größerem Zeithorizont erkennbar. Für  $t_d = 2$  s sind die Rechenzeiten hingegen deutlich höher. Zudem steigt sie mit größer werdendem Zeithorizont stark an.

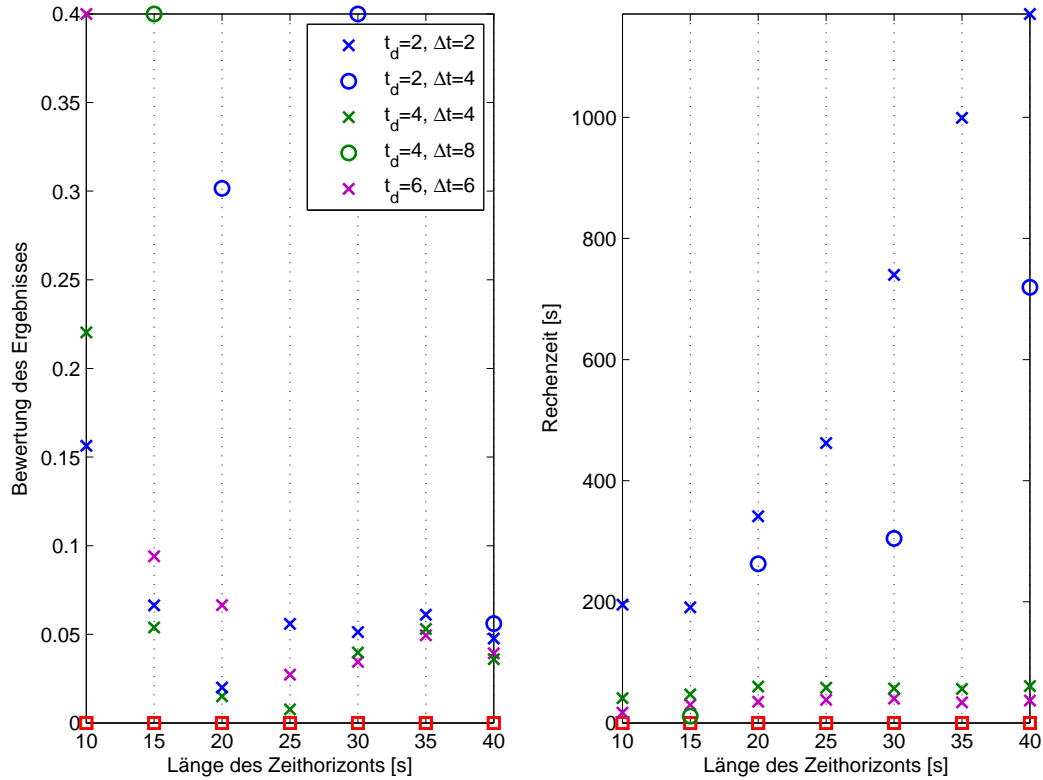


Abbildung 6.14: Entwicklung des Wertes der Bewertungsfunktion und der Rechenzeit bei Variation der Länge des Zeithorizonts sowie der Parameter  $t_d$  und  $\Delta t$  mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Referenztrajektorie.

Da gerade für kurze Zeithorizonte das Verfahren mit  $t_d = \Delta t = 4$  s bessere Ergebnisse liefert als mit  $t_d = \Delta t = 6$  s und der Unterschied in der Rechenzeit verhältnismäßig gering ist, wird diese Kombination mit  $T = 20$  s für die nachfolgenden Untersuchungen verwendet.

### Exemplarische Lösung eines ungestörten Testfalls

Abbildung 6.15 zeigt beispielhaft das Ergebnis für die Lösung des Wiedereintrittproblems bei Verwendung der Geschwindigkeit als Referenzgröße und ausschließlicher Gewichtung des Abstands zur Referenztrajektorie zum jeweils letzten Zeitpunkt des Prädiktionshorizonts. Dazu werden die Gewichtungsparemeter (6.4) verwendet. Der betrachtete Zeithorizont beträgt 20 s. Die äquidistant verteilten Stützstellen haben einen Abstand von 4 s, sodass in jeder MPC-Iteration mit sechs diskreten Punkten gerechnet wird. Dadurch ist in jedem MPC-Schritt ein Optimierungsproblem mit 61 Optimierungsvariablen und 165 Nebenbedingungen zu lösen. Im Durchschnitt werden dafür 5,4 *WORHP*-Iterationen benötigt. Bei Verwendung der Endkosten waren es beim ungestörten Fall fast doppelt so viele.

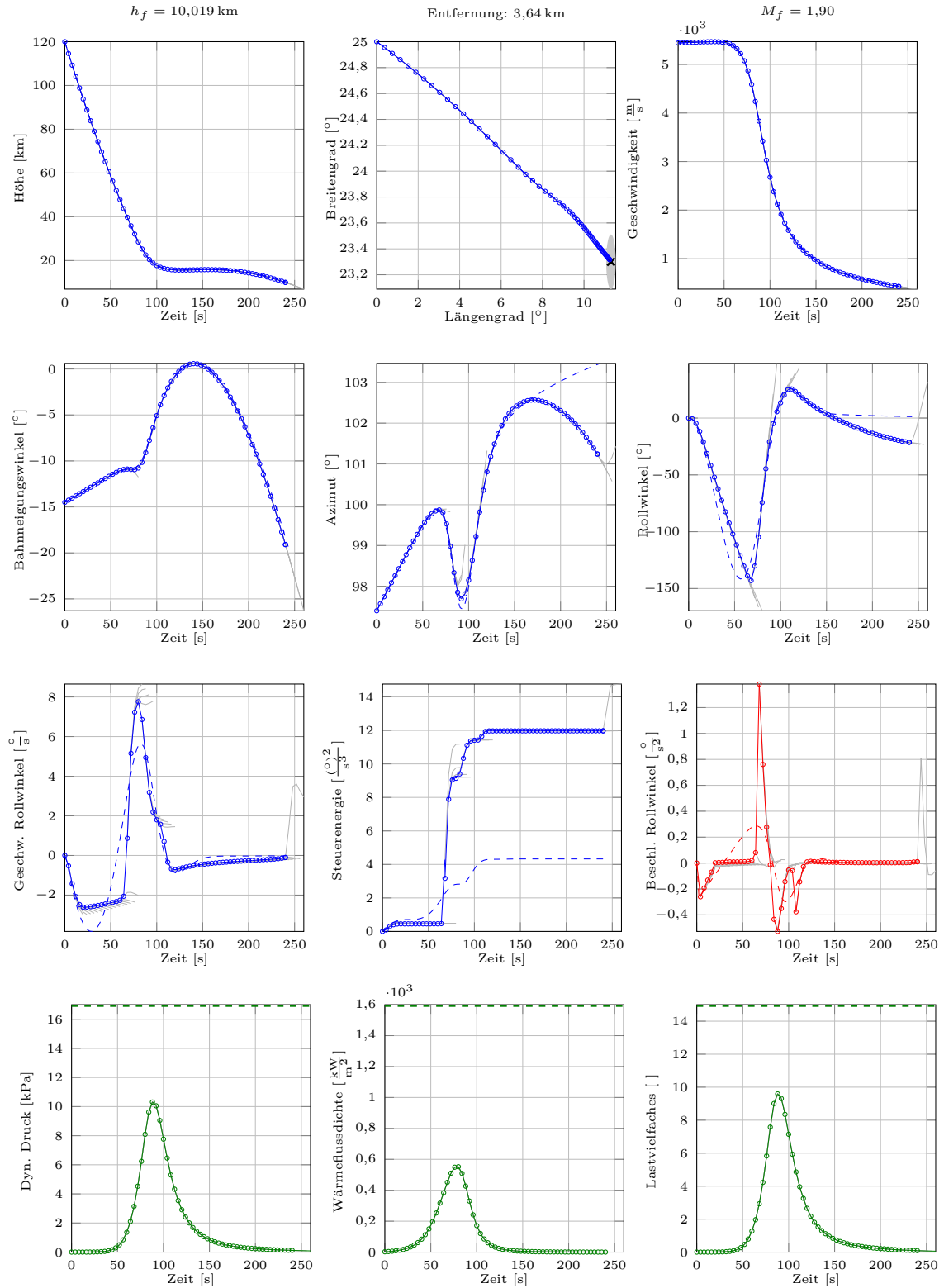


Abbildung 6.15: Exemplarische Lösung des MPC-Verfahrens bei Verwendung der Referenztrajektorie mit einem Zeithorizont von 20s und  $t_d = \Delta t = 4\text{s}$ . MPC-It.: 61, Rechenzeit: 89s. Pro MPC-Schritt: Diskrete Punkte: 6, Opt.var.: 61, Nebenbed.: 165,  $\emptyset$  WORHP-It.: 3,6.

Analog zu den Abbildungen im vorherigen Abschnitt werden die Zustände blau, die Steuerung rot und die Pfadbeschränkungen grün dargestellt. Die in Abbildung 6.2 dargestellte und als Referenztrajektorie verwendete Lösung ist jeweils durch eine gestrichelte Linie dargestellt. In den Abbildungen der Höhe, des Längen- und Breitengrades, der Geschwindigkeit und des Bahnneigungswinkel ist diese Linie kaum zu erkennen, da der Verlauf dieser Zustände sehr genau mit der Referenzlösung übereinstimmt. So werden auch die Endbedingungen mit einer Höhe von 10,019 km und einer Machzahl von 1,9 erfüllt. Die Entfernung zum Landeplatz liegt mit 3,64 km innerhalb des gewünschten grau hinterlegten Gebietes.

Bei genauer Betrachtung erkennt man, dass sowohl die Geschwindigkeit als auch die Höhe geringfügig schneller abnehmen als bei der Referenzlösung. Daraus folgt zum Einen die kürzere Prozesszeit von ca. 240 s im Vergleich zu 243 s. Andererseits ist darauf vermutlich außerdem das knappe Verfehlen des Zielpunktes zurückzuführen. Um diesen Fehler so klein wie möglich zu halten, weicht der Azimut ab etwa 170 s zunehmend vom Referenzwert ab. Verursacht wird diese Änderung durch den Rollwinkel, der in dieser letzten Phase im Gegensatz zur Referenzlösung negativ ist. Da der Rollwinkel im eigentlichen Sinn kein Zustand, sondern die Steuergröße ist, wird für diese Variable keine Referenz im Zielfunktional berücksichtigt. Der Verlauf ähnelt der Lösung des gesamten optimalen Steuerprozesses (gestrichelt) dennoch stark. Es ist jedoch auch zu erkennen, dass an den Extrempunkten bei knapp 70 s und etwa 110 s erst bei ausreichendem Vorausschauen die Wendung in die jeweils andere Richtung eingeleitet wird. In den durch graue Linien gekennzeichneten vorherigen Iterationen wäre die eingeschlagene Richtung fortgesetzt worden. Die Steuerung zeigt auch gerade in diesen Zeiträumen die größten Absolutwerte, die zudem deutlich über der Referenzlösung liegen. Daraus resultiert ein sprunghafter Anstieg der Steuerenergie zwischen 70 und 100 s auf etwa das Dreifache der bei der Referenzlösung benötigten Energie.

Wie bei den ersten Zuständen ist auch bei den Pfadbeschränkungen die Referenzlösung nicht erkennbar. Da der Verlauf der Geschwindigkeit sehr gut mit der Referenztrajektorie übereinstimmt und die Beschränkungen hauptsächlich von dieser abhängen, zeigen auch die Pfadbeschränkungen kaum Abweichungen. Die Höchstwerte bleiben somit auch in diesem Fall klar unter den zugelassenen Maximalwerten.

Alles in allem zeigt der in Abbildung 6.15 dargestellte Testfall, dass im ungestörten Fall durch Verwenden einer Referenztrajektorie bereits mit einem Zeithorizont von 20 s ein sehr gutes Resultat erzielt werden kann. Im Hinblick auf die Kapazitäten eines Bordcomputer ist dies ein großer Vorteil gegenüber der in Abschnitt 6.2 vorgestellten Variante mit Endkosten im Zielfunktional. In dem Fall wurden vergleichbare Ergebnisse mit einem achtmal so langen Zeithorizont erreicht.

### 6.3.2 Einfluss verschiedener Störgrößen

#### Dünnere Atmosphäre als angenommen

Wie im vorangegangenen Abschnitt bei Verwendung der Endkosten im Zielfunktional werden auch für die Minimierung des Abstandes zu einer Referenztrajektorie verschiedene Störungen untersucht. In Abbildung 6.16 wird zunächst exemplarisch das Resultat für eine Abweichung der Atmosphärendaten um  $\mu_{atm} = -20\%$  im Mittel mit einer Standardabweichung von  $\sigma_{atm} = 2\%$  dargestellt. Die übrigen Paramtereinstellungen entsprechen den Werten des letzten Beispiels (Abbildung 6.15).

Die Endwerte in der ersten Zeile zeigen, dass die gewünschten Endbedingungen nicht erreicht werden. Da die Dichte und die Schallgeschwindigkeit im gestörten Modell geringer sind als im zur Optimierung verwendeten Modell, ist die Geschwindigkeit jeweils zu Beginn einer MPC-Iteration höher als vom NLP-Löser berechnet. Durch eine geringere Dichte als angenommen wird das Fahrzeug nicht so stark abgebremst. Zudem wird die für eine Machzahl von 1,9 zu erreichende Geschwindigkeit aufgrund der zu groß angenommenen Schallgeschwindigkeit zu hoch eingeschätzt und somit das Fahrzeug nicht ausreichend abgebremst.

Ein Blick auf den Verlauf des Rollwinkels zeigt, dass das Verfahren auf die veränderte Situation reagiert. Der Rollwinkel ändert in dem abgebildeten Fall öfter die Richtung, wodurch auch die Ausrichtung des Azimut stärker von der Referenztrajektorie abweicht. Durch dieses Verhalten wird versucht, die Flugphase bei wenig Höhenverlust zu verlängern, sodass mehr Zeit für die Geschwindigkeitsreduzierung bleibt. Die Endwerte der Höhe und der Geschwindigkeit zeigen, dass dies nur teilweise gelingt. Das Fahrzeug ist zum Endzeitpunkt bereits 718 m zu tief, fliegt aber mit dem 2,1-fachen der Schallgeschwindigkeit noch zu schnell, um den Fallschirm sicher öffnen zu können. Die zu hohe Geschwindigkeit führt zudem dazu, dass über den Zielpunkt hinweg geflogen wird. Die obere mittige Abbildung verdeutlicht jedoch auch, dass die Flugbahn von oben gesehen gut mit der Referenztrajektorie übereinstimmt.

Das wiederholte Ändern der Richtung des Rollwinkels wird durch eine stärker als zuvor ausschlagende Steuerung erreicht. Vor allem zwischen der 60. und der 180. Sekunde werden viele Änderungen vorgenommen. Dadurch steigt die Steuerenergie besonders in diesem Bereich stark an und ist am Ende etwa doppelt so hoch wie im in Abbildung 6.15 dargestellten ungestörten Fall.

Durch das Unterschätzen der Geschwindigkeit werden auch die Pfadbeschränkungen, die hauptsächlich von dieser abhängen, geringer eingeschätzt als sie im gestörten System sind. Besonders die Maximalwerte des dynamischen Drucks und des Lastvielfachen sind deutlich höher als im ungestörten Fall. Jedoch werden auch in diesem Beispiel die zulässigen Höchstwerte nicht erreicht, sodass die Pfadbeschränkungen keinen direkten Einfluss auf die Wahl der Flugbahn haben.

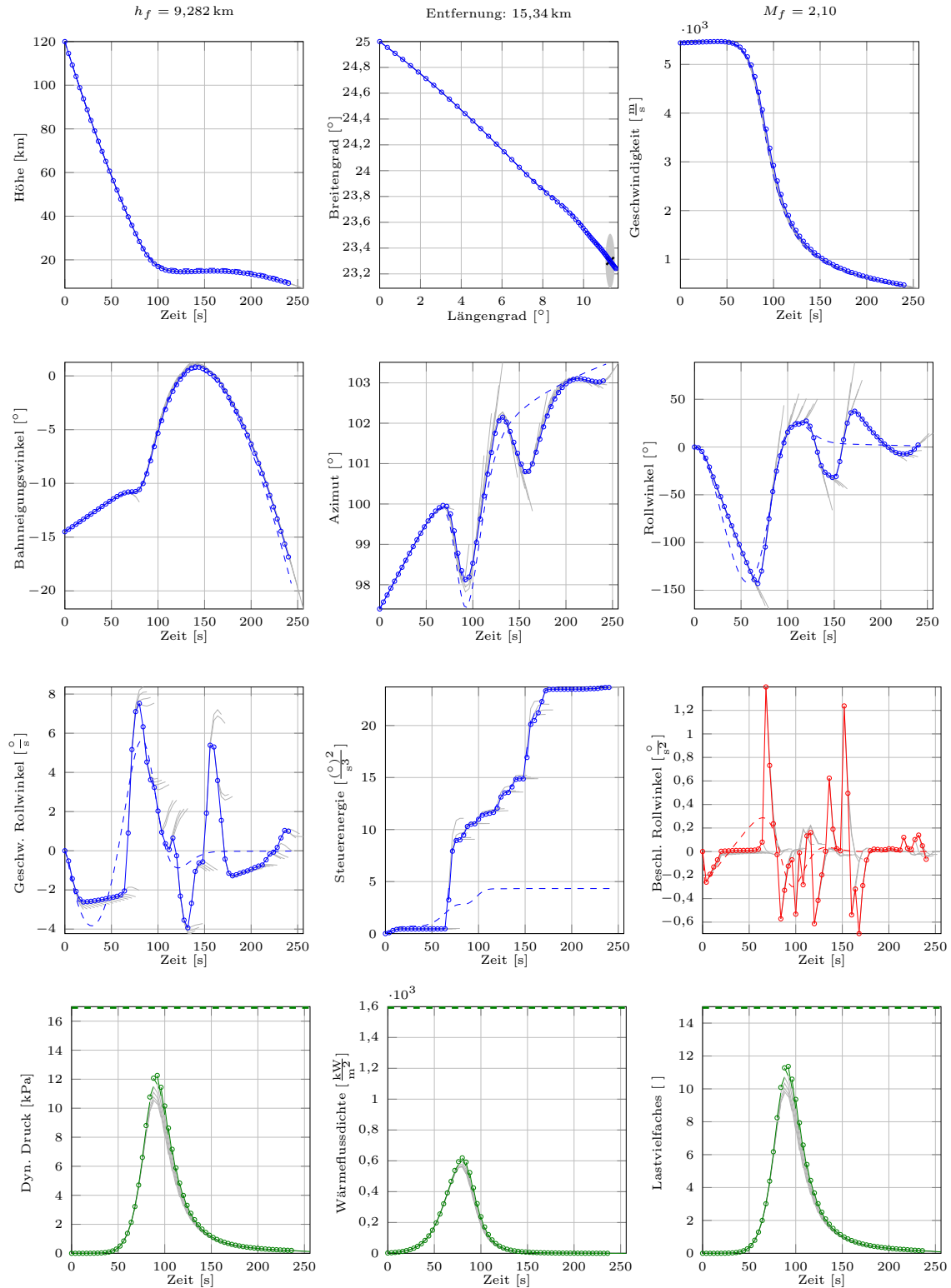


Abbildung 6.16: Abweichung der Atmosphäre von  $-20\%$  im Mittel mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Referenztrajektorie mit einem Zeithorizont von 20s und  $t_d = \Delta t = 4s$ . MPC-It.: 60, Rechenzeit: 282s. Pro MPC-Schritt: Diskrete Punkte: 6, Opt.var.: 61, Nebenbed.: 165,  $\emptyset$  WORHP-It.: 5,4.

Die ausführliche Analyse dieses Beispiels für den Fall einer dünneren Atmosphäre als angenommen hat die Grenzen der modellprädiktiven Regelung mit Trajektorienverfolgung aufgezeigt. Das Fahrzeug bewegt sich zwar in die richtige Richtung und verliert auch zunehmend an Geschwindigkeit, allerdings ist die Störung zu groß, um das Problem unter den gegebenen Bedingungen zufriedenstellend lösen zu können. Die Lösung ähnelt dem entsprechenden Testfall mit Endkosten (vgl. Abbildung 6.7). Auch in diesem Fall konnten die Endbedingungen nicht erfüllt werden. Zudem wird durch ähnliche Verläufe des Azimut und des Rollwinkels auf die zu dünne Atmosphäre reagiert. Dies lässt vermuten, dass eine stärker abweichende Flugbahn die nötige Geschwindigkeitsreduzierung bewirken könnte. Demzufolge könnten im Vorfeld berechnete Referenztrajektorien für unterschiedliche Störfälle bessere Lösungen liefern. Um die Übersichtlichkeit der Analyse zu gewährleisten, werden die Untersuchungen in dieser Arbeit aber auf die Verwendung der gleichen Referenztrajektorie für alle Testfälle beschränkt.

### **Verschiedene Störungen der Atmosphärendaten**

Neben dem soeben detailliert erläuterten Störfall werden auch andere mittlere Abweichungen der Atmosphärendaten untersucht. Die Ergebnisse in Abbildung 6.17 sind analog zu Abbildung 6.8 in Abhängigkeit der mittleren Störung dargestellt. Dabei erfolgt die Analyse wie bei der Verwendung des MPC-Verfahrens mit Endkosten mit einer Standardabweichung von 2 %. Die Resultate entsprechender Untersuchungen mit einer Standardabweichung von 4 % sind im Anhang unter Abbildung A.8 zu finden. Abgesehen davon, dass die Ergebnisse eine etwas breitere Streuung aufweisen, stimmen sie stark Abbildung 6.17 überein.

Aufgrund der Standardabweichung von 2 % entsprechen die Testfälle mit einer mittleren Störung von 0 % nicht dem ungestörten Fall. Es sind allerdings nur sehr geringe Abweichungen von den gewünschten Endwerten festzustellen. Eine positive Störung der Atmosphärendaten bedeutet, dass die Atmosphäre dicker ist als angenommen und das Fahrzeug somit stärker abgebremst wird. Daraus resultiert, dass die gewünschte Geschwindigkeit bereits in einer größeren Höhe erreicht wird. Die geringere Geschwindigkeit führt allerdings auch dazu, dass sich die Trajektorie verkürzt und somit der Zielpunkt nicht erreicht werden kann.

Die Annahme, dass die Atmosphäre dünner ist als erwartet, verursacht hingegen größere Probleme. Wie auch anhand von Abbildung 6.16 bereits analysiert, wird das Fahrzeug abgebremst weniger als erwartet, sodass die Geschwindigkeit nicht ausreichend reduziert werden kann. Abbildung 6.17 zeigt, dass mit zunehmender Störung der Atmosphärendaten der Endwert der Machzahl etwa linear ansteigt. Bis zu einer Störung von  $-15\%$  liegt die Endgeschwindigkeit der meisten Testfälle noch innerhalb des tolerierten Bereichs bis zum 2-fachen der Schallgeschwindigkeit. Die zugehörigen Endhöhen liegen jedoch für alle negativen Abweichungen meist knapp unterhalb der



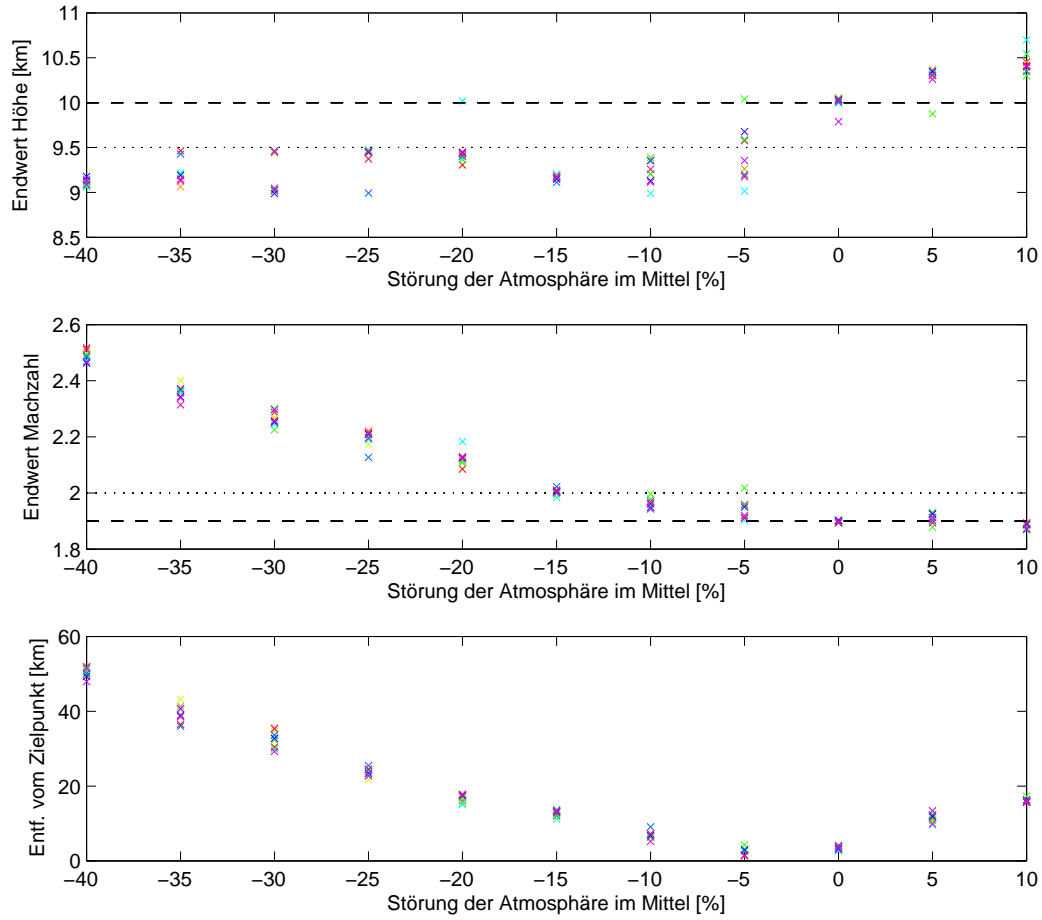


Abbildung 6.17: Endzustände bei verschiedenen mittleren Abweichungen der Atmosphäre mit einer Standardabweichung von 2 % mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Referenztrajektorie mit einem Zeithorizont von 20 s und  $t_d = \Delta t = 4$  s.

Grenze von 9,5 km. Die Entfernung vom Zielpunkt steigt etwa linear bei größer werdenden Störungen der Atmosphärendaten an. Wie auch im vorherigen Fall (vgl. Abbildung 6.16), liegt die Ursache hierfür vermutlich darin, dass aufgrund der zu hohen Geschwindigkeit der Zielpunkt überflogen wird.

Alles in allem verdeutlichen die dargestellten Untersuchungen, dass selbst geringe Störungen der Atmosphärendaten großen Einfluss auf das System haben. Mit dem gewählten Zielfunktional und den zugehörigen Parametern können nur bei geringen Abweichungen in den Atmosphärendaten noch Trajektorien berechnet werden, die die Endbedingungen erfüllen. Das entspricht den Beobachtungen beim MPC-Verfahren mit Endkosten in Abbildung 6.8. Wie bereits erwähnt, könnte diesem Problem durch das Verwenden verschiedener Referenztrajektorien entgegengewirkt werden.

### Störungen der fahrzeugspezifischen Konstanten

In Kapitel 2 wurde erläutert, dass der Anstellwinkel  $\alpha$  (vgl. Abbildung 2.7) bei den gesamten Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit als konstant  $20^\circ$  angenommen wird. Schwankungen dieses Winkels wirken sich unter den getroffenen Annahmen nur auf die fahrzeugspezifischen Konstanten  $C_D$  und  $C_L$  aus. Aus diesem Grund können Schwankungen des Anstellwinkels durch Störungen von  $C_D$  und  $C_L$  simuliert werden. Auch für die fahrzeugspezifischen Konstanten sind negative Abweichungen interessanter als positive, da dadurch weniger Strömungswiderstand und Auftrieb simuliert wird als angenommen (vgl. Gleichungen (2.2) und (2.3)).

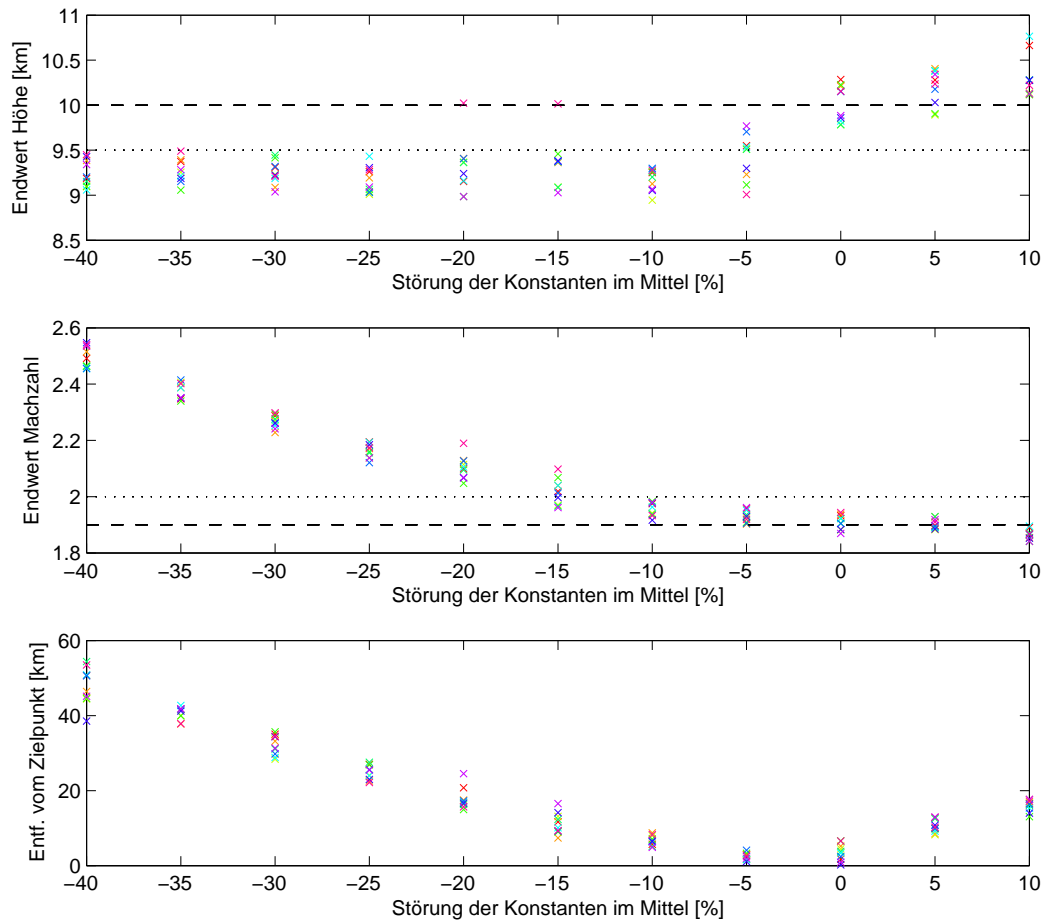


Abbildung 6.18: Endzustände bei verschiedenen mittleren Abweichungen der Konstanten  $C_D$  und  $C_L$  mit einer Standardabweichung von 2 % mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Referenztrajektorie mit einem Zeithorizont von 20 s und  $t_d = \Delta t = 4$  s.

In Abbildung 6.18 sind analog zu Abbildung 6.17 die Endwerte für Höhe, Geschwindigkeit und Entfernung in Abhängigkeit von der mittleren Störung der Konstanten  $C_D$  und  $C_L$  aufgetragen. Es werden ebenfalls Störungen mit einem Mittelwert

$\mu_{const}$  von  $-40$  bis  $10\%$  und einer Standardabweichung  $\sigma_{const}$  von  $2\%$  betrachtet. Die gestörten Konstanten werden jeweils aus den zugehörigen Zufallsvariablen  $p_{C_D}$  und  $p_{C_L}$  gemäß den Gleichungen (5.20) bestimmt. Für eine qualitative Analyse wurden wiederum zehn Testfälle pro Mittelwert durchgeführt. Die Ergebnisse mit einer Standardabweichung von  $4\%$  befinden sich im Anhang unter Abbildung A.9, liefern jedoch keine neuen Erkenntnisse.

Es fällt auf, dass sich die Ergebnisse bei Störungen der Konstanten  $C_D$  und  $C_L$  den in der vorherigen Abbildung dargestellten Resultaten bei Abweichungen in den Atmosphärendaten stark ähneln. Bei zunehmender Abweichung der Konstanten steigt der Endwert der Machzahl in gleichem Maße linear an. Die Endhöhe liegt wiederum in den meisten Fällen leicht unterhalb der Toleranzgrenze von  $9,5\text{ km}$ . Auch die Beobachtungen bezüglich der Entfernungen zum Zielpunkt stimmen mit den Erkenntnissen aus Abbildung 6.17 überein.

Die Ähnlichkeiten sind darauf zurückzuführen, dass geringere Werte für  $C_D$  und  $C_L$  weniger Strömungswiderstand und weniger Auftrieb bedeuten. Eine dünnere Atmosphäre bewirkt ebenfalls weniger Strömungswiderstand und weniger Auftrieb (vgl. Gleichungen (2.2) und (2.3)). Somit beeinflussen beide Störquellen den Prozess auf dieselbe Weise. In beiden Fällen ist es unter den gegebenen Voraussetzungen bereits bei Störungen von  $-10\%$  im Mittel nicht möglich, die Geschwindigkeit bei ausreichender Endhöhe auf weniger als das 2-fache der Schallgeschwindigkeit zu reduzieren.

### Geringere Eintrittshöhe

Analog zu den Untersuchungen bei Verwendung der Endkosten wird auch in diesem Fall der Einfluss unterschiedlicher Eintrittshöhen und Eintrittsgeschwindigkeiten analysiert. Abbildung 6.19 zeigt exemplarisch die Lösung des MPC-Verfahrens bei Verwendung einer Referenztrajektorie mit einer Anfangshöhe von  $100\text{ km}$ . Alle übrigen Einstellungen entsprechen denen des ungestörten Falls (vgl. Abbildung 6.15). Es soll somit die gleiche Geschwindigkeitsreduktion bei einer  $20\text{ km}$  geringeren Höhe erreicht werden. Die Ergebnisse dieses Testfalls sind auch bereits in Abbildung 6.13 beim Vergleich dieser Variante mit anderen Varianten des Zielfunktional berücksichtigt worden.

Die Endwerte über den Graphen in Abbildung 6.19 verdeutlichen, dass trotz der geringeren Eintrittshöhe die Geschwindigkeit ausreichend reduziert werden kann. Die Abweichung der Endhöhe beträgt mit  $239\text{ m}$  weniger als die tolerierten  $5\%$ . Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Dichte und dadurch auch der Strömungswiderstand beim Eintritt höher sind als im ungestörten Fall. Somit setzt die Geschwindigkeitsreduktion eher ein. Dadurch wird die Eintrittsphase um ca.  $20\text{ s}$  verkürzt. Dies führt dazu, dass am Ende der Phase noch etwa  $96\text{ km}$  zum gewünschten Endpunkt fehlen. Es ist somit nicht sichergestellt, dass das Fahrzeug in einer geeigneten Region landen kann.

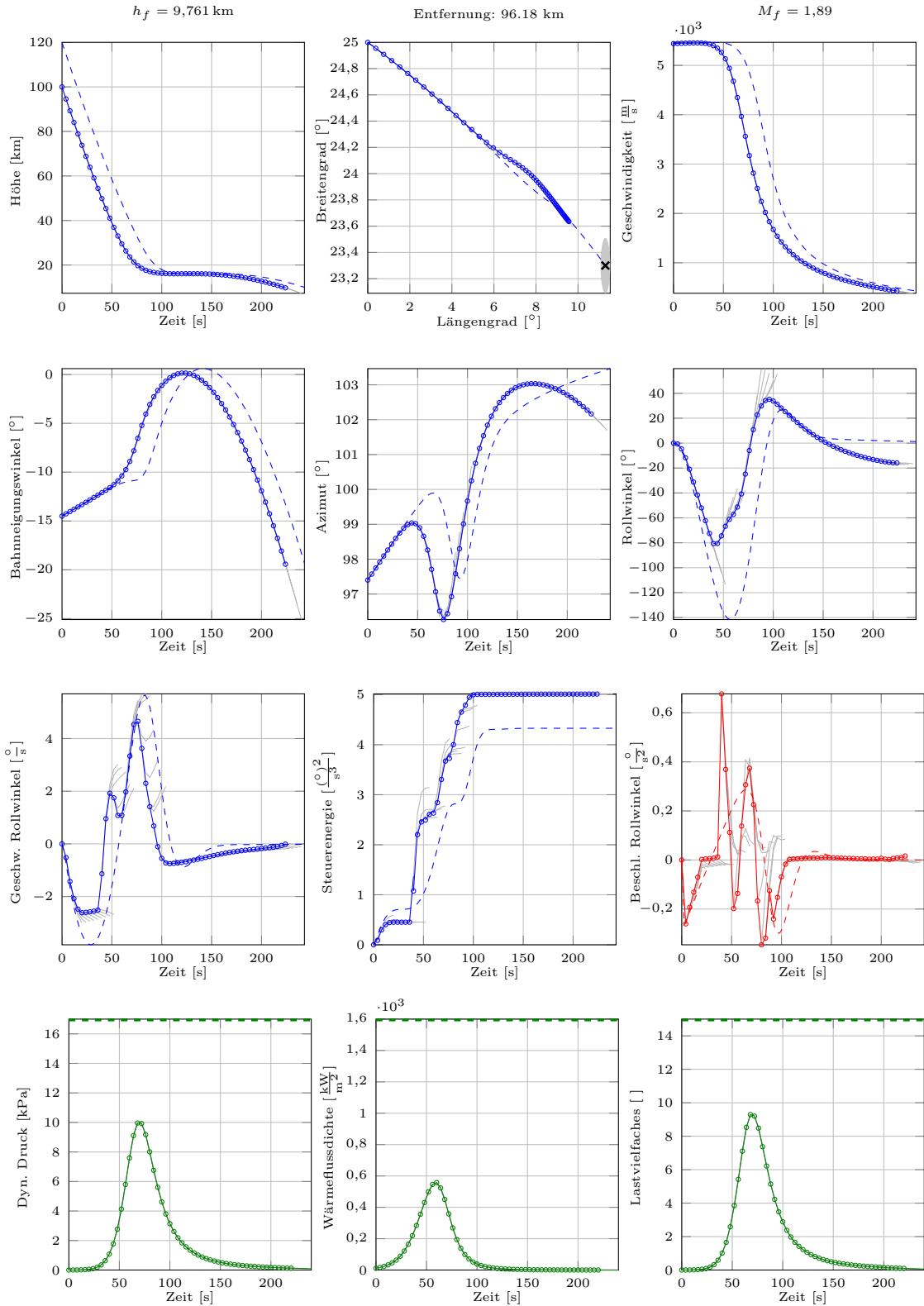


Abbildung 6.19: Eintrittshöhe von 100 km mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Referenztrajektorie mit einem Zeithorizont von 20 s und  $t_d = \Delta t = 4$  s. MPC-It.: 56, Rechenzeit: 117 s. Pro MPC-Schritt: Diskrete Punkte: 6, Opt.var.: 61, Nebenbed.: 165,  $\emptyset$  WORHP-It.: 4,5.

Der Rollwinkel ändert seine Richtung eher als im ungestörten Fall (vgl. Abbildung 6.15). Der Minimalwert liegt nach etwa 44 s bei ca.  $-80^\circ$ . Ab diesem Zeitpunkt kann man eine zeitliche Verschiebung des Verlaufs des Rollwinkels im Vergleich zum ungestörten Fall erkennen. Diese Verschiebung ist auch in den Kurven des Bahnneigungswinkels und des Azimut klar zu sehen. Somit wird erreicht, dass das Fahrzeug schon eher an Geschwindigkeit verliert und somit die gewünschte Machzahl erreicht werden kann. Gleichzeitig resultiert aus der geringeren Geschwindigkeit, dass weniger Weg zurückgelegt und somit der Zielpunkt nicht erreicht werden kann.

Da der Minimalwert des Rollwinkels deutlich über dem des ungestörten Falls liegt, ist auch die notwendige Gesamtsteuerenergie nur etwa halb so groß. Die zeitliche Verschiebung der Zustände wirkt sich auch auf die Pfadbeschränkungen aus. Sowohl für den aerodynamischen Druck als auch für die Wärmeflussdichte und das Lastvielfache wird der Maximalwert etwa 20 s eher erreicht. An den Größenordnungen ändert sich jedoch nichts, sodass die zulässigen Höchstwerte nicht erreicht werden.

Wie bei Verwendung der Endkosten führt auch in diesem Fall eine geringere Anfangshöhe dazu, dass die Bedingungen zur Öffnung des Fallschirms eingehalten werden können, aber der gewünschte Zielpunkt weit verfehlt wird. Falls es die Beschaffenheit der Oberfläche des Mars an dem abweichenden Landepunkt zulässt, kann die Mission trotzdem erfolgreich abgeschlossen werden.

### Höhere Eintrittsgeschwindigkeit

Wie im vorherigen Abschnitt wird nun das Resultat bei einer Anfangsgeschwindigkeit von  $6000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  betrachtet. Die mit Hilfe einer Referenztrajektorie berechnete Lösung dieses Testfalls ist in Abbildung 6.20 dargelegt.

Die Werte in der ersten Zeile zeigen, dass die Endbedingung an die Höhe eingehalten wird und die Endgeschwindigkeit mit dem 1,95-fachen der Schallgeschwindigkeit im akzeptablen Bereich liegt. Dazu wird die Steuerung so gewählt, dass sich insgesamt viermal die Richtung des Rollwinkels ändert. Demnach treten größere Werte bei der Beschleunigung dieses Winkels auf, sodass die Steuerenergie insgesamt etwa doppelt so hoch ist wie im ungestörten Fall. Durch den abweichenden Verlauf des Rollwinkels ändert sich auch die Richtung des Azimut häufiger. Dadurch sieht man auch in der Draufsicht der Flugbahn (obere mittlere Abbildung) eine leichte Abweichung von der Referenztrajektorie. Durch die höhere Eintrittsgeschwindigkeit wird mehr Strecke zurückgelegt und aus diesem Grund der Landepunkt um 19,43 km überflogen. Die Zeit bis zur Öffnung des Fallschirms ist ebenfalls aufgrund der höheren Geschwindigkeit mit etwa 236 s etwas kürzer als im ungestörten Fall.

Durch die angepasste Steuerung wird erreicht, dass der größte Teil der zusätzlichen kinetischen Energie im Vergleich zum ungestörten Fall (vgl. Abbildung 6.15) in Wärme umgewandelt werden kann. Das Fahrzeug ist im dargestellten Fall beim At-

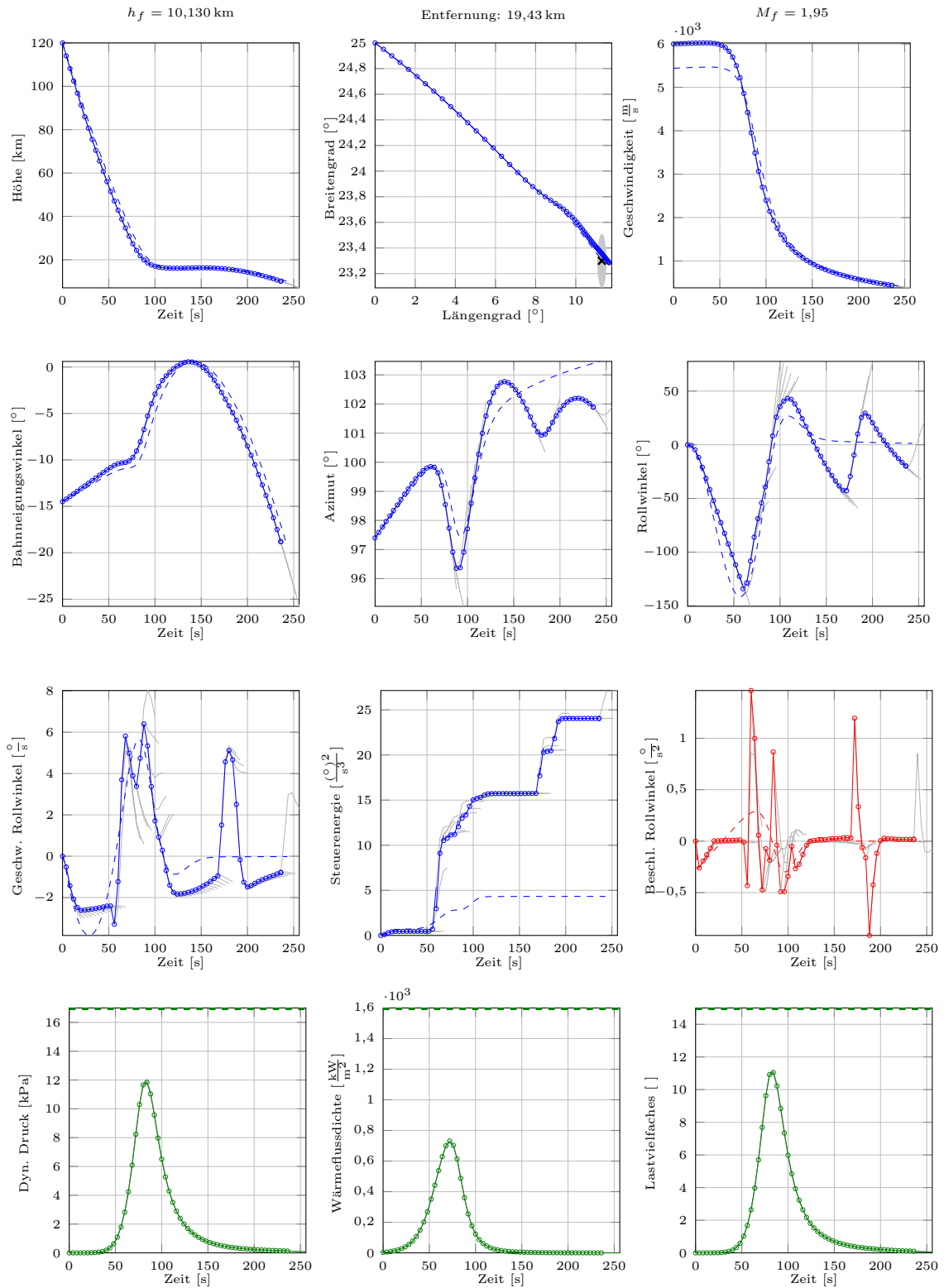


Abbildung 6.20: Eintrittsgeschwindigkeit von  $6000 \frac{m}{s}$  mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Referenztrajektorie mit einem Zeithorizont von 20 s und  $t_d = \Delta t = 4$  s. MPC-It.: 60, Rechenzeit: 146 s. Pro MPC-Schritt: Diskrete Punkte: 6, Opt.var.: 61, Nebenbed.: 165,  $\phi$  WORHP-It.: 5,2.

mosphäreneintritt etwa  $560 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  schneller als erwartet. Mit  $439 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  ist es in 10 km Höhe nur noch etwa  $11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  zu schnell.

Durch die höhere Eintrittsgeschwindigkeit und der daraus resultierenden höheren kinetischen Energie des Fahrzeugs steigt die Belastung beim Wiedereintritt. Dementsprechend liegen die Höchstwerte aller Pfadbeschränkungen über den Werten der Referenzlösung. Die zugelassenen Maximalwerte werden aber auch in diesem Fall nicht erreicht.

Das in Abbildung 6.20 exemplarisch für eine höhere Eintrittsgeschwindigkeit dargestellte Resultat zeigt, dass der Regler in der Lage ist, die Steuerung an die spezielle Situation anzupassen. Die gewählte Referenztrajektorie scheint vor allem für das Verhältnis der Höhe zur Geschwindigkeit gut gewählt zu sein. Beim Azimut ist die Abweichung von der Referenztrajektorie jedoch deutlich zu sehen. Durch die relativ geringe Gewichtung von  $w_\chi$  geht diese nicht so stark in das Zielfunktional ein wie eine für die aktuelle Geschwindigkeit zu geringe Höhe. Dadurch können die Endbedingungen mit akzeptabler Abweichung erfüllt werden. Der Landepunkt liegt mit 19,43 km etwas außerhalb der anvisierten Landeregion. Damit ist dieser Fehler im Vergleich zu dem des Verfahrens mit Endkosten (vgl. Abbildung 6.10) größer, der Fehler der Machzahl ist jedoch in diesem Fall etwas geringer. Es kann somit ein ähnlich gutes Ergebnis erzielt werden wie bei Verwendung der Endkosten.

### Kombination verschiedener Eintrittshöhen und Eintrittsgeschwindigkeiten

Neben den soeben betrachteten abweichenden Anfangswerten werden nun weitere Störungen der Eintrittshöhe und Eintrittsgeschwindigkeit getestet und die Ergebnisse in Abbildung 6.21 dargestellt. Diese Resultate sind analog zu Abbildung 6.11 angeordnet.

Das beste Ergebnis wird mit den Standardeinstellungen von 120 km Höhe und einer Geschwindigkeit von  $5440,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  erzielt. Auch bei geringen Abweichungen von diesen Anfangswerten weist die Bewertungsfunktion einen kleinen Wert auf. Die schlechtesten Ergebnisse werden mit geringen Eintrittshöhen und geringen Eintrittsgeschwindigkeiten erreicht. Dazu gehört auch der in Abbildung 6.19 dargestellte Testfall. Dieses Resultat lässt vermuten, dass die hohen Werte der Bewertungsfunktion größtenteils durch Abweichungen vom Zielpunkt entstehen. Die Bedingungen an Endhöhe und Endgeschwindigkeit können hingegen vermutlich auch bei geringen Eintrittshöhen noch mit einem akzeptablen Fehler eingehalten werden.

Ähnliche hohe Werte der Bewertungsfunktion werden bei hohen Eintrittshöhen und hohen Eintrittsgeschwindigkeiten berechnet. Das in Abbildung 6.20 dargestellte Ergebnis zeigt einen solchen Fall. Die Analyse dieses Beispiels lässt vermuten, dass die hohen Werte der Bewertungsfunktion in diesen Testfällen neben einer vergleichsweise

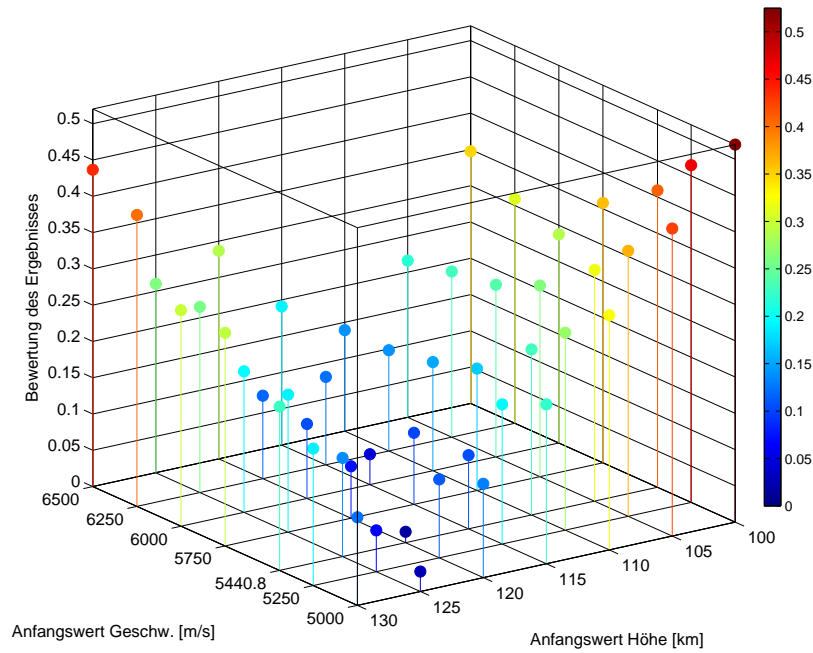


Abbildung 6.21: Wert der Bewertungsfunktion bei verschiedenen Eintrittshöhen und Eintrittsgeschwindigkeiten mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Referenztrajektorie mit einem Zeithorizont von 20 s und  $t_d = \Delta t = 4$  s.

geringen Abweichung vom Zielpunkt zudem durch Fehler in der Endbedingung der Geschwindigkeit verursacht werden.

Der Fehler einer geringen Anfangshöhe und einer hohen Anfangsgeschwindigkeit summieren sich, wie im Fall der Lösung mit Endkosten (vgl. Abbildung 6.11) auch in diesem Fall nicht auf. Obwohl die Störungen in diesen Fällen die größten sind, treten nicht die höchsten Abweichungen von der gewünschten Lösung auf. Wie im Fall der Endkosten ist dies darauf zurückzuführen, dass der großen Abweichung vom Zielpunkt bei geringen Eintrittshöhen teilweise durch die hohe Geschwindigkeit entgegengewirkt wird und sich die Effekte gegenseitig abschwächen.

Alles in allem bewegen sich die Fehler etwa im gleichen Bereich wie bei den entsprechenden Testfällen mit Endkosten. Der Wert der Bewertungsfunktion beträgt bei großen Abweichungen der Anfangswerte maximal 0,51. Da der Zeithorizont durch die Verwendung der Referenztrajektorie um 87,5 % reduziert werden konnte, sind diese Ergebnisse als Erfolg zu werten. Wie bei Störungen der Atmosphärendaten könnte auch in diesem Fall eine Verbesserung der Resultate durch das Verwenden mehrerer Referenztrajektorien erreicht werden.



### Kombination verschiedener Eintrittshöhen und Störungen der Atmosphärendaten

Neben der Kombination aus verschiedenen Anfangsstörungen werden auch gestörte Anfangswerte in Verbindung mit Störungen der Atmosphärendaten untersucht. In Abbildung 6.22 sind die Ergebnisse zu den verschiedenen Anfangshöhen zwischen 100 und 130 km bei Störungen der Atmosphäre zwischen  $-40$  und  $10\%$  im Mittel dargestellt. Die Standardabweichung beträgt  $2\%$ . Als Bewertungsgrundlage dient wiederum der Wert der Bewertungsfunktion (6.2), welcher durch die Höhe und unterschiedliche Farbe der Punkte gekennzeichnet ist.

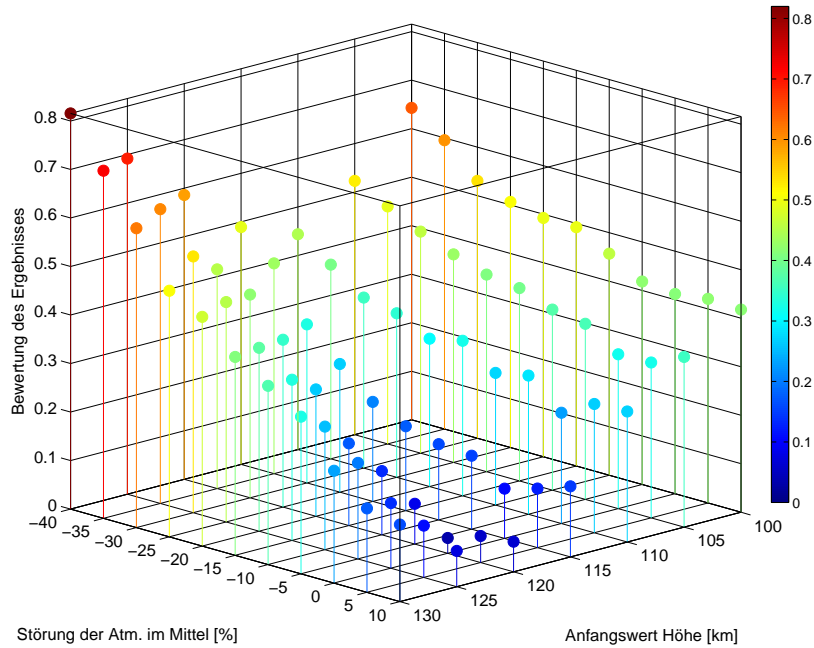


Abbildung 6.22: Wert der Bewertungsfunktion bei verschiedenen Eintrittshöhen und Störungen der Atmosphäre mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Referenztrajektorie mit einem Zeithorizont von 20 s und  $t_d = \Delta t = 4$  s.

Auch bei diesen Untersuchungen liefert der ungestörte Fall das beste Ergebnis. Wie zu erwarten nimmt der Wert der Bewertungsfunktion bei geringerer Eintrittshöhe und bei zunehmender Abweichung von den angenommenen Atmosphärendaten zu. Eine Kombination von Störungen beider Parameter führt jedoch auch in diesem Fall nicht zwangsläufig zu einer Verschlechterung des Ergebnisses. Bei einer großen Abweichung der Atmosphärendaten von  $30\%$  oder mehr ist der Wert der Bewertungsfunktion bei geringer Eintrittshöhe teilweise kleiner als bei Eintrittshöhen von 120 km oder mehr. Dies ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass eine dünnere Atmosphäre dazu führt, dass das Fahrzeug nicht so schnell an Geschwindigkeit verliert wie angenommen. Dadurch wird der Zielpunkt wie auch im in Abbildung 6.16 dargestellten

Fall überflogen. Eine geringe Eintrittshöhe bewirkt hingegen eine zu kurze Flugdauer, sodass der Landepunkt nicht erreicht werden kann. Somit kann sich bei großen Abweichungen der Atmosphäre und geringen Eintrittshöhen der Fehler in der Entfernung zum Zielpunkt ausgleichen. Der Wert der Bewertungsfunktion wird somit in diesen Fällen hauptsächlich von der Verletzung der Endbedingungen bestimmt. Diese wird vorrangig durch die Störung in den Atmosphärendaten verursacht.

### Kombination verschiedener Eintrittsgeschwindigkeiten und Störungen der Atmosphärendaten

Analog zum vorherigen Abschnitt werden Störungen der Atmosphäre in Kombination mit verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten untersucht. Abbildung 6.23 zeigt die Resultate dieser Testfälle, wobei die Atmosphäre in gleichem Maße wie zuvor und die Eintrittsgeschwindigkeit zwischen  $5000$  und  $6500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  variiert wird. Durch rote Quadrate werden Testfälle gekennzeichnet, in denen keine Lösung des Problems gefunden werden konnte.

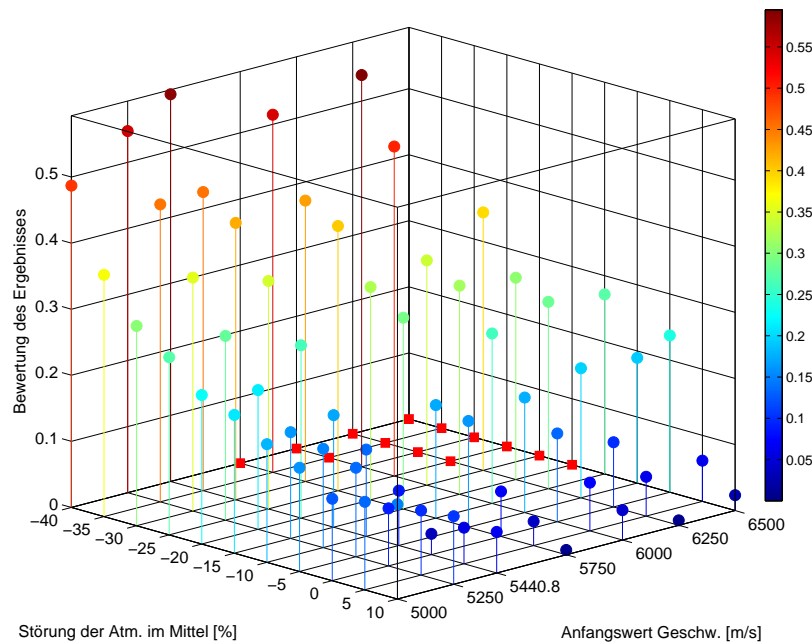


Abbildung 6.23: Wert der Bewertungsfunktion bei verschiedenen Eintrittsgeschwindigkeiten und Störungen der Atmosphäre mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Referenztrajektorie mit einem Zeithorizont von  $20 \text{ s}$  und  $t_d = \Delta t = 4 \text{ s}$ .

Zunächst fällt auf, dass die fehlerhaften Testdurchläufe ausschließlich bei der Kombination von hoher Anfangsgeschwindigkeit und dünner Atmosphäre auftreten. Dies ist darauf zurückzuführen, dass beide Arten von Störungen hauptsächlich Schwierigkeiten in der Reduzierung der Geschwindigkeit hervorrufen und somit einen ähnlichen

Einfluss auf das Problem haben. Dadurch verstärkt sich der Effekt, sodass es zu den fehlerhaften Testdurchläufen kommt.

Andererseits können positive und negative Abweichungen vom Normalwert sich auch ausgleichen. Aus diesem Grund kommt es bei einer mittleren Abweichung der Atmosphärendaten von 10 % auch bei hohen Eintrittsgeschwindigkeiten teilweise zu besseren Ergebnissen als im ungestörten Fall. Durch die dickere Atmosphäre wird das Fahrzeug stärker abgebremst, sodass die höhere Anfangsgeschwindigkeit dazu führt, dass der Zielpunkt gut erreicht und die Endbedingungen eingehalten werden können.

Ein solcher Ausgleich ist im Fall einer geringen Eintrittsgeschwindigkeit von beispielsweise  $5000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und einer großen Abweichung der Atmosphärendaten von  $-30\%$  im Mittel oder mehr jedoch nicht zu beobachten. Dies zeigt, dass der Einfluss der Atmosphäre größer ist als der der Anfangsgeschwindigkeit. Während die die Eintrittsgeschwindigkeit einmalig zu Beginn des Wiedereintritts eine Abweichung vom ungestörten Fall darstellt, wird durch eine dünnere Atmosphäre der Zustand des Systems zu jedem Zeitpunkt gestört. Abbildung 6.23 verdeutlicht die Auswirkungen dieses Unterschiedes.

Zusammenfassend kann man sagen, dass bei den in diesem Abschnitt betrachteten Störfällen ähnlich gute Resultate erzielt werden wie bei der Variante mit Endkosten in Abschnitt 6.2. In beiden Fällen können für abweichende Anfangswerte zufriedenstellende Resultate erzielt werden. Bei geringeren Eintrittshöhen steigt der Fehler etwa in gleichem Maße an. Eine höhere Eintrittsgeschwindigkeit führt bei Verwendung der Referenztrajektorie zu einer größeren Entfernung zum Zielpunkt und daher auch zu höheren Werten der Bewertungsfunktion. Für Abweichungen der Atmosphärendaten sind die Ergebnisse ähnlich. Negative Störungen von  $-10\%$  oder mehr führen dazu, dass die Geschwindigkeit nicht ausreichend reduziert werden kann. Bei Verwendung einer Referenztrajektorie bewegen sich die Fehler für verschiedene Störfälle also etwa im gleichen Rahmen wie bei Verwendung der Endkosten mit einem achtmal so langem Zeithorizont.

# Kapitel 7

## Fazit und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit ist, die Anwendbarkeit der modellprädiktiven Regelung auf Wiedereintrittsprobleme zu überprüfen und den Umgang dieses Verfahrens mit Störungen unterschiedlicher Art zu analysieren. Dabei werden sowohl Beschränkungen der Zustände als auch der Steuerung berücksichtigt. Das MPC-Verfahren wird mit zwei sich grundlegend unterscheidenden Ansätzen untersucht: Einerseits werden im Zielfunktional ausschließlich Endkosten minimiert und im anderen Fall wird versucht, den Abstand zu einer Referenztrajektorie so gering wie möglich zu halten. Bei beiden Varianten werden zunächst die Gewichtungsfaktoren im Zielfunktional untersucht, um im ungestörten Fall möglichst gute Resultate zu erzielen. Zudem wird der Einfluss des Zeithorizonts auf das Problem bestimmt. Abschließend werden mit den festgelegten Parametern Störungen bezüglich der Atmosphäre und der Anfangswerte untersucht.

Alles in allem zeigen die in Kapitel 6 dargelegten Ergebnisse, dass die Idee der modellprädiktiven Regelung auf die Problematik des Wiedereintritts eines Fahrzeugs in die Atmosphäre des Mars anwendbar ist. Bei passender Parameterwahl werden die Endbedingungen der Höhe und der Geschwindigkeit bei Betrachtung der Endkosten im ungestörten Fall lediglich in vernachlässigbarem Rahmen verletzt. Bei Verwendung der Referenztrajektorie werden sie eingehalten. Der anvisierte Landepunkt kann mit einer Abweichung von 280 m bei Verwendung der Endkosten bzw. 3,64 km im Fall der Referenztrajektorie erreicht werden. Zudem werden die für das Fahrzeug geltenden Pfadbeschränkungen bei beiden Varianten während der gesamten Eintrittsphase eingehalten, sodass sichergestellt ist, dass das Fahrzeug nicht verglüht.

Der Vorteil der Wahl des Zielfunctionals mit Endkosten liegt darin, dass im Gegensatz zur Verwendung einer Referenztrajektorie im Vorfeld keine Kenntnis einer möglichen Lösung vorhanden sein muss. Die Untersuchungen der Länge des Zeithorizonts für diese Variante haben jedoch einen entscheidenden Nachteil hervorgebracht: Um die geforderten Endbedingungen mit lediglich geringen Fehlern zu verletzen, sind Zeithorizonte von über 140 s notwendig. Dies ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass entscheidende Punkte der Flugbahn, wie beispielsweise das Maximum des Bahnneigungswinkels, erst etwa 130 bis 140 s nach dem Eintritt in die Atmosphäre erreicht

---

werden. Diese Beobachtung unterstreicht die notwendige problemspezifische Anpassung der Länge des Zeithorizonts beim MPC-Verfahren. Mit Zeithorizonten von mindestens 150 s sind die zu erwartenden Rechenzeiten, insbesondere auf Bordcomputern, allerdings zu hoch, um Echtzeitfähigkeit zu ermöglichen.

Durch die Verwendung einer Referenztrajektorie kann auch bei kurzen Zeithorizonten eine zielführende Flugbahn berechnet werden. Zu jedem Zeitpunkt ist der optimale Wert der einzelnen Zustände bekannt. Die Ergebnisse zeigen, dass durch die Berücksichtigung der Referenztrajektorie bereits ein Prädiktionshorizont von 20 s ausreicht, um das Problem stabil zu lösen.

Die Betrachtung unterschiedlicher Arten von Störungen hat gezeigt, dass durch die modellprädiktive Regelung auf unterschiedliche Situationen mit anderen Verläufen der Zustände und der Steuerung reagiert werden kann. Durch Anwendung des MPC-Verfahrens besteht zu jeder Zeit die Möglichkeit, die Flugbahn so zu ändern, dass auf Grundlage der neuen Situation der verbleibende Verlauf des Prozesses optimiert wird. Die Resultate belegen auch den großen Einfluss der Atmosphäre auf die Bestimmung der Trajektorie. Abweichungen bis  $-10\%$  können sowohl bei der Variante mit Endkosten als auch bei der Referenztrajektorie mit akzeptablen Fehlern bei den Endwerten von Höhe und Geschwindigkeit kompensiert werden. Bei größeren negativen Störungen liegt der Fehler mindestens bei einem der entscheidenden Endwerte über der tolerierten Grenze von  $5\%$ . Somit ist in diesen Fällen nicht sichergestellt, dass der Fallschirm den auftretenden Kräften standhält.

Eine Möglichkeit, besser auf abweichende Atmosphärendaten reagieren zu können, wäre, die Gewichtungsparemeter im Zielfunktional abhängig von weiteren Variablen wie beispielsweise der Dichte der Atmosphäre zu wählen. Eine stärkere Gewichtung der Geschwindigkeit könnte bei dünnerer Atmosphäre zielführend sein. Zudem könnte für alle Gewichtungsparemeter ein zeitabhängiger und gegebenenfalls auch nichtlinearer Verlauf betrachtet werden. Dies führt auf eine Vielzahl weiterer Parameterkombinationen, sodass die Wahl dieser Parameter als eigenes Optimierungsproblem aufgefasst werden kann. Im Fall der Trajektorienverfolgung wäre es außerdem möglich, im Vorfeld Referenztrajektorien für verschiedene Störungen zu berechnen und die jeweils am besten für die aktuelle Situation geeignete Trajektorie für die Regelung zu verwenden.

Des Weiteren wurden die Resultate für abweichende Anfangswerte der Höhe und der Geschwindigkeit diskutiert. Selbst bei bis zu  $16,7\%$  geringeren Eintrittshöhen und bis zu  $19,5\%$  höheren Eintrittsgeschwindigkeiten liegen die Endbedingungen der berechneten Flugbahnen bei beiden Varianten meist im akzeptablen Bereich. Jedoch wird vor allem bei abweichenden Eintrittshöhen der gewünschte Landepunkt nicht erreicht. Dieses Resultat lässt vermuten, dass auch in diesem Fall durch eine gezielte Anpassung der Gewichtungsfaktoren im Zielfunktional Verbesserungen erzielt werden können, beispielsweise durch eine höhere Gewichtung der Entfernung zum

Landepunkt bei geringerer Anfangshöhe. Allerdings führen diese Überlegungen wiederum auf sehr viele Möglichkeiten bei der Wahl des Zielfunktional, sodass zahlreiche numerische Testfälle zur Bestimmung der optimalen Parameter notwendig sind. Bei der Variante mit Referenztrajektorie könnte ebenfalls die Erstellung einer Sammlung von Trajektorien für verschiedene mögliche Kombinationen an Anfangswerten im Vorfeld die Resultate verbessern. Jedoch erfordert die Abdeckung möglichst vieler unterschiedlicher Szenarien eine hohe Speicherkapazität.

Abschließend wurde bei Verwendung der Referenztrajektorie die Kombination von Abweichungen in den Atmosphärendaten und den Anfangswerten untersucht. Auch bei geringeren Eintrittshöhen konnten für Störungen der Atmosphäre bis zu  $-40\%$  akzeptable Ergebnisse erzielt werden. Das gleichzeitige Ausgleichen von höheren Eintrittsgeschwindigkeiten und Abweichungen in den Atmosphärendaten ist hingegen problematischer, da in beiden Fällen die Reduzierung der Geschwindigkeit erschwert wird.

Im Rahmen dieser Arbeit sind alle auftretenden Optimalsteuerungsprobleme mit äquidistanten Stützstellen diskretisiert und die resultierenden nichtlinearen Optimierungsprobleme mit dem SQP-Verfahren gelöst worden. Weiterführende Untersuchungen könnten den Einfluss von anderen Anordnungen der Stützstellen oder andere Optimierungsverfahren berücksichtigen. Zudem könnte eine andere Skalierung zu besseren Ergebnissen führen. Bei der Diskretisierung wurde in dieser Arbeit zur Approximation der Systemdynamik hauptsächlich das Trapez-Verfahren und am Rande das Hermite-Simpson-Verfahren verwendet. Auch an dieser Stelle könnte sich ein Blick auf andere numerische Methoden lohnen.

Insgesamt bleibt festzuhalten, dass mit der modellprädiktiven Regelung mit der Variante der Endkosten nur bei einem ausreichend langen Zeithorizont gute Lösungen für mögliche Flugbahnen erzielt werden können. Das Verfahren reagiert sehr sensibel auf Variationen der Parameter und Gewichtungsfaktoren. Durch eine weiterführende Analyse der einzelnen Parameter könnten auch auf kürzeren Zeithorizonten noch bessere Ergebnisse erzielt werden. Jedoch ist eine Reduktion auf einen Prädiktionshorizont von 20 s oder weniger kaum denkbar. Da dies bei Verwendung einer Referenztrajektorie möglich ist, ist diese Variante vorzuziehen, sofern im Vorfeld der Verlauf einer möglichen Lösung bekannt ist. Mit den gewählten Einstellungen sind die Fehler ähnlich. Aufgrund der Möglichkeit eine Sammlung von Referenztrajektorien in die Regelung einzubeziehen, gibt es auch in diesem Fall die erfolversprechendsten Verbesserungsmöglichkeiten für den Umgang mit Störfällen.

# Literaturverzeichnis

- [1] Astrium. *Precision Lander Entry, Descent and Landing Analysis*, Juni 2011.
- [2] Betts, John T. *Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [3] Boggs, Paul T. und Tolle, Jon W. *Sequential Quadratic Programming*. *Acta Numerica*, Vol. 4: S. 1–52, 1996.
- [4] Braun, Robert D. und Manning, Robert M. *Mars Exploration Entry, Descent and Landing Challenges*. In *Aerospace Conference, 2006 IEEE*, 2006.
- [5] Brown, Dwayne et al. *The Mars Science Laboratory Landing*. *World Neurosurgery*, Vol. 79(2): S. 223–242, 2013.
- [6] Bryson, Arthur E. und Ho, Yu-Chi. *Applied Optimal Control*. Hemisphere Publishing Corporation, 1975.
- [7] Büskens, Christof. *Numerik der Optimierung*, 2012. Vorlesungsskript Universität Bremen WS 2011/2012.
- [8] ESA. *Announcement of Opportunity: ExoMars Entry, Descent, and Landing Demonstrator Module Science*. In *Joint Mars Exploration Programme*, November 2010.
- [9] Findeisen, Rolf und Allgöwer, Frank. *An Introduction to Nonlinear Model Predictive Control*. In *21st Benelux Meeting on Systems and Control, Veidhoven*, S. 1-23, 2002.
- [10] Geiger, Carl und Kanzow, Christian. *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*. Springer, 2002.
- [11] Graichen, Knut. *Methoden der Optimierung und optimalen Steuerung*, 2014. Universität Ulm, Institut für Mess-, Regel- und Mikrotechnik.
- [12] Grant, Michael J., Clark, Ian G. und Braun, Robert D. *Rapid Entry Corridor Trajectory Optimization for Conceptual Design*. In *Guidance, Navigation, and Control Conference*, Toronto, Canada, August 2010. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [13] Grotzinger, John P. *Habitability, Taphonomy, and the Search for Organic Carbon on Mars*. *Science*, Vol. 343(6169): S. 386–387, 2014.
- [14] Grotzinger, John P. et al. *A Habitable Fluvio-Lacustrine Environment at Yellowknife Bay, Gale Crater, Mars*. *Science*, Vol. 343(6169), 2014.

- [15] Grüne, Lars und Pannek, Jürgen. *Nonlinear Model Predictive Control: Theory and Algorithms*. Communications and Control Engineering. Springer, 2011.
- [16] Hirschel, Ernst H. und Weiland, Claus. *Selected Aerothermodynamic Design Problems of Hypersonic Flight Vehicles*. Springer, 2009.
- [17] Ioffe, Aleksandr D. und Tihomirov, Vladimir M. *Theory of Extremal Problems*. North-Holland Publishing Company, 1979.
- [18] Justus, Carl G. und Braun, Robert D. *Atmospheric Environments for Entry, Descent and Landing (EDL)*, Juni 2007.
- [19] Knauer, Matthias. *Bilevel-Optimalsteuerung mittels hybrider Lösungsmethoden am Beispiel eines deckengeführten Regalbediengerätes in einem Hochregallager*, März 2009. Doktorarbeit, Universität Bremen.
- [20] Luo, Yu, Serrani, Andrea, Yurkovich, Stephen, Oppenheimer, Michael W. und Doman, David B. *Model-Predictive Dynamic Control Allocation Scheme for Reentry Vehicles*. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 30(1): S. 100–113, Januar-Februar 2007.
- [21] Makovsky, Andre, Ilott, Peter und Taylor, Jim. *Mars Science Laboratory Telecommunications System Design*, November 2009. Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, DESCANSO Design and Performance Summary Series.
- [22] Marsh, Christopher L. und Braun, Robert D. *Fully-Propulsive Mars Atmospheric Transit Strategies for High-Mass Missions*. *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 48(2): S. 271–282, März-April 2011.
- [23] Medagoda, Eran D. B. und Gibbens, Peter W. *Efficient Predictive Flight Control*. In *International Conference on Control, Automation and Systems*, Kintex, Korea, Oktober 2010.
- [24] Mendeck, Gavin F. und Craig, Lynn E. *Entry Guidance for the 2011 Mars Science Laboratory Mission*. In *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, Portland, Oregon, August 2011.
- [25] Mumma, Michael J. *The Search for Life on Mars*, Januar 2012. Origin of Life Gordon Research Conference; 8-13 Jan. 2012; Galveston, TX; United States.
- [26] NASA, Dezember 1965. Great Images in NASA (GRIN), GRIN DataBase Number: GPN-2000-001067, <http://grin.hq.nasa.gov/ABSTRACTS/GPN-2000-001067.html>.
- [27] NASA. Mars atmosphere, 1976. Solar System Exploration, [http://solarsystem.nasa.gov/multimedia/display.cfm?Category=Planets&IM\\_ID=18307](http://solarsystem.nasa.gov/multimedia/display.cfm?Category=Planets&IM_ID=18307).



- [28] NASA. *Mars Science Laboratory/Curiosity*, 2013. Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, National Aeronautics and Space Administration.
- [29] Nocedal, Jorge und Wright, Stephen J. *Numerical Optimization*. Springer, New York, 2. Auflage, 2006.
- [30] Shearer, C. M. und Heise, S. A. *Constrained Model Predictive Control of a Non-linear Aerospace System*, 1998. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [31] Steltzner, Adam D. et al. *Mars Science Laboratory Entry, Descent, and Landing System Overview*, Mai 2010. Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology.
- [32] Vinh, Nguyen X., Busemann, Adolf und Culp, Robert D. *Hypersonic and Planetary Entry Flight Mechanics*. The University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, 1980.
- [33] Voegt, S. *Reference Frame Definitions*, August 2002. Astrium.
- [34] Way, David W. et al. *Mars Science Laboratory: Entry, Descent, and Landing System Performance*. In *Aerospace Conference, 2007 IEEE*, S. 1-19, 2007.
- [35] Weiland, Claus. *Computational Space Flight Mechanics*. Springer-Verlag, 2010.
- [36] Williams, David. Mars fact sheet, Juli 2013. <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/marsfact.html>.
- [37] Wingrove, Rodney C. *Survey of Atmosphere Re-Entry Guidance and Control Methods*. *AIA Journal*, Vol. 1(9): S. 2019–2029, September 1963.



# Anhang A

## Zusätzliche numerische Ergebnisse

An dieser Stelle werden zusätzliche numerische Resultate aufgeführt, die im Rahmen dieser Arbeit entstanden sind. Sie sind ergänzend zu den Darstellungen in Kapitel 6 zu sehen und werden auch jeweils an entsprechender Stelle referenziert.

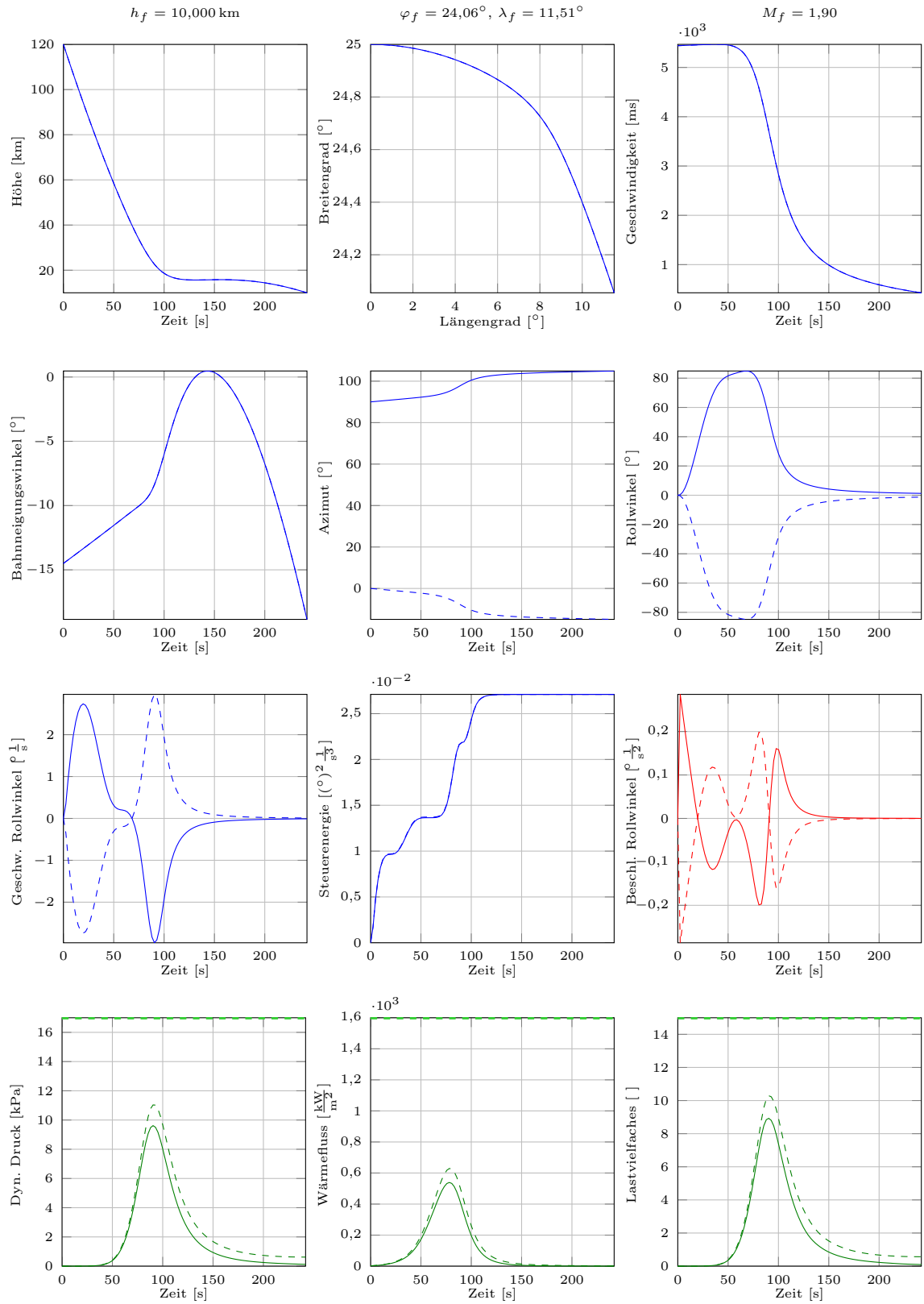


Abbildung A.1: Vergleich der Lösungen bei einem nach Norden (durchgezogene Linie) und nach Osten (gestrichelte Linie) definierten Bahnazimut.

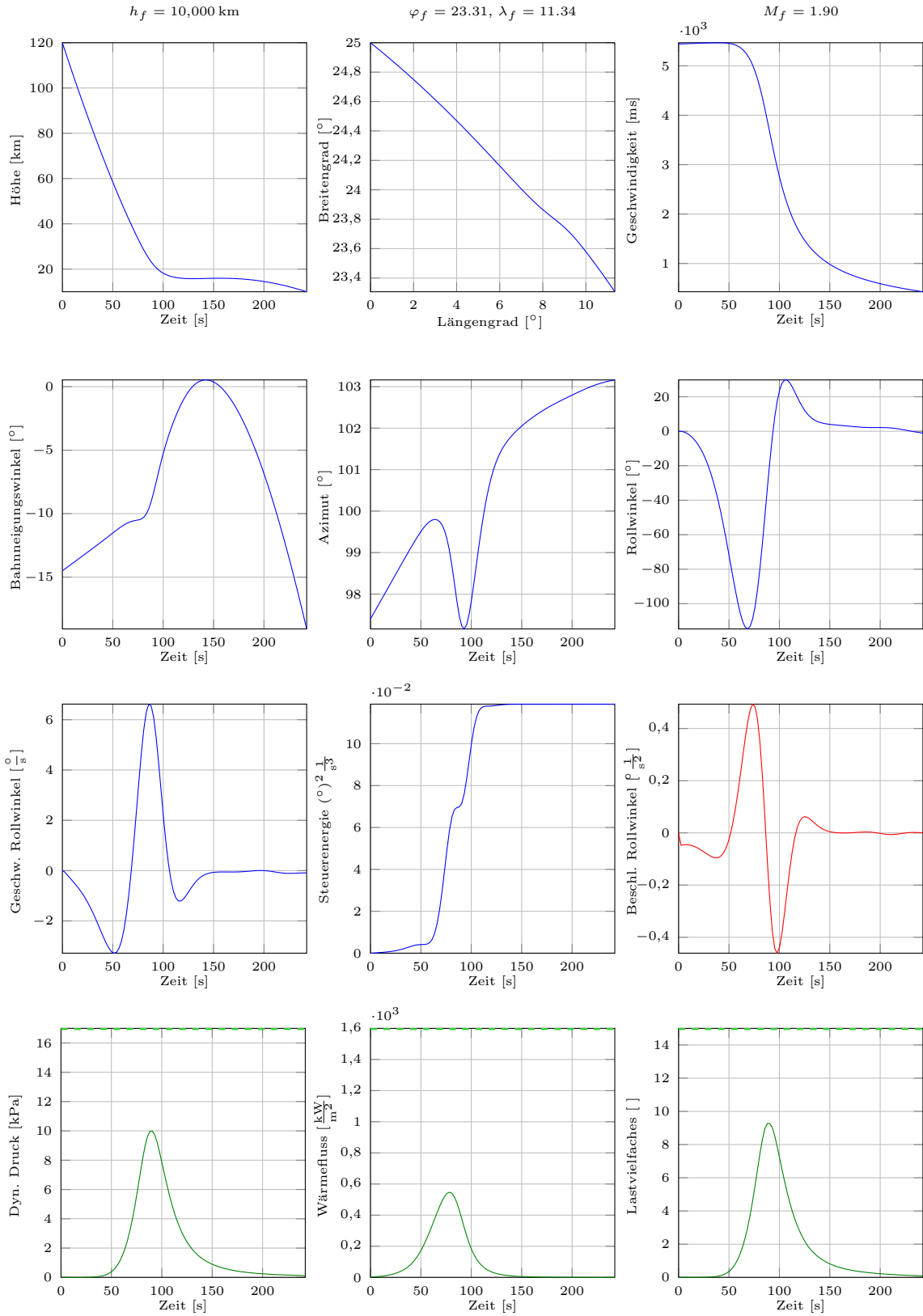


Abbildung A.2: Optimale Steuerung zum Breitengrad  $\tilde{\varphi} = 23,3^\circ \text{N}$

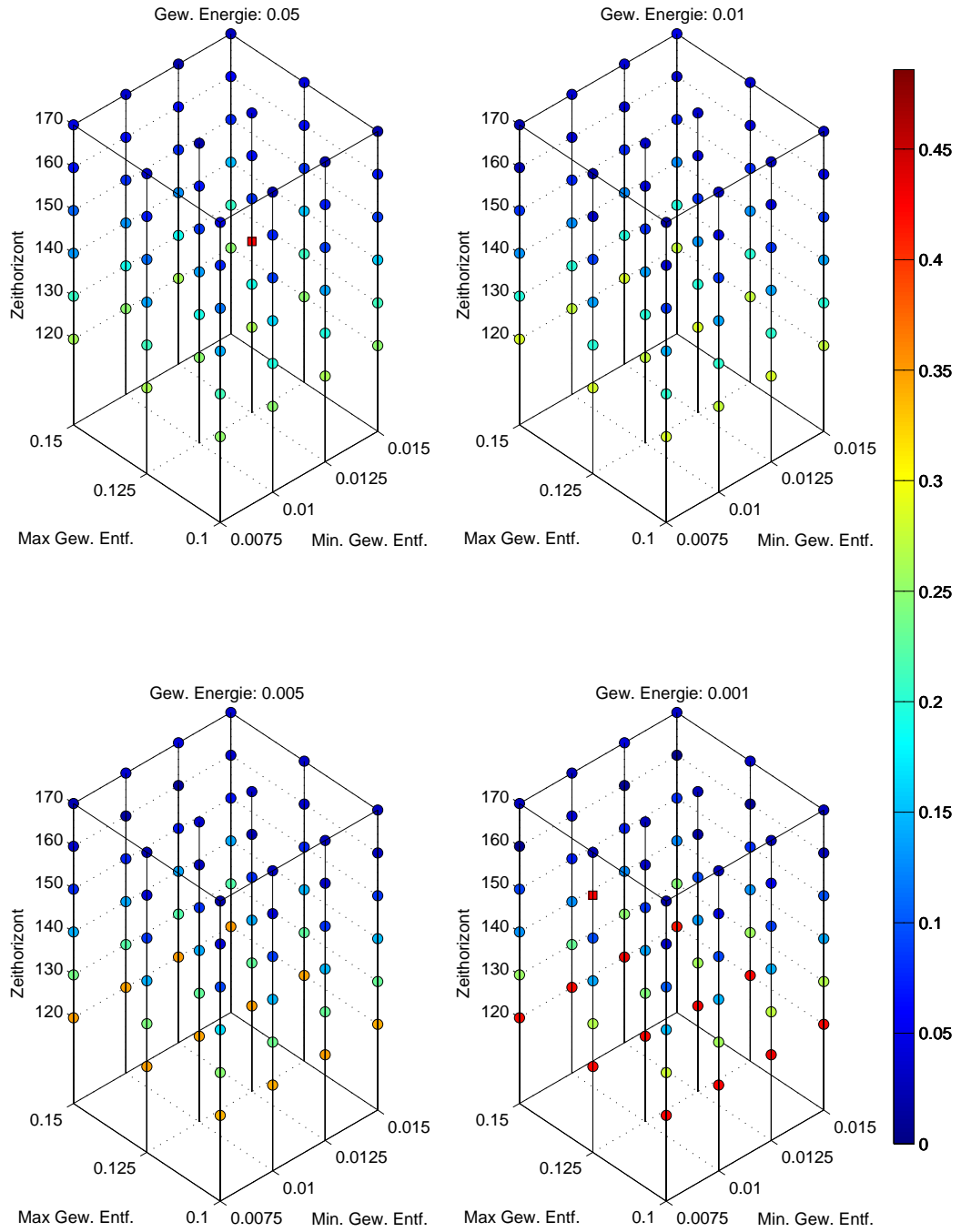


Abbildung A.3: Variation der Gewichtungparameter der Energie  $w_e$  und der Minimal- und Maximalwerte der Entfernung  $w_{entf, Min}$  und  $w_{entf, Max}$  bei unterschiedlichen Zeithorizonten (Gewichtung der Höhe: 0,95) mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Endkosten.

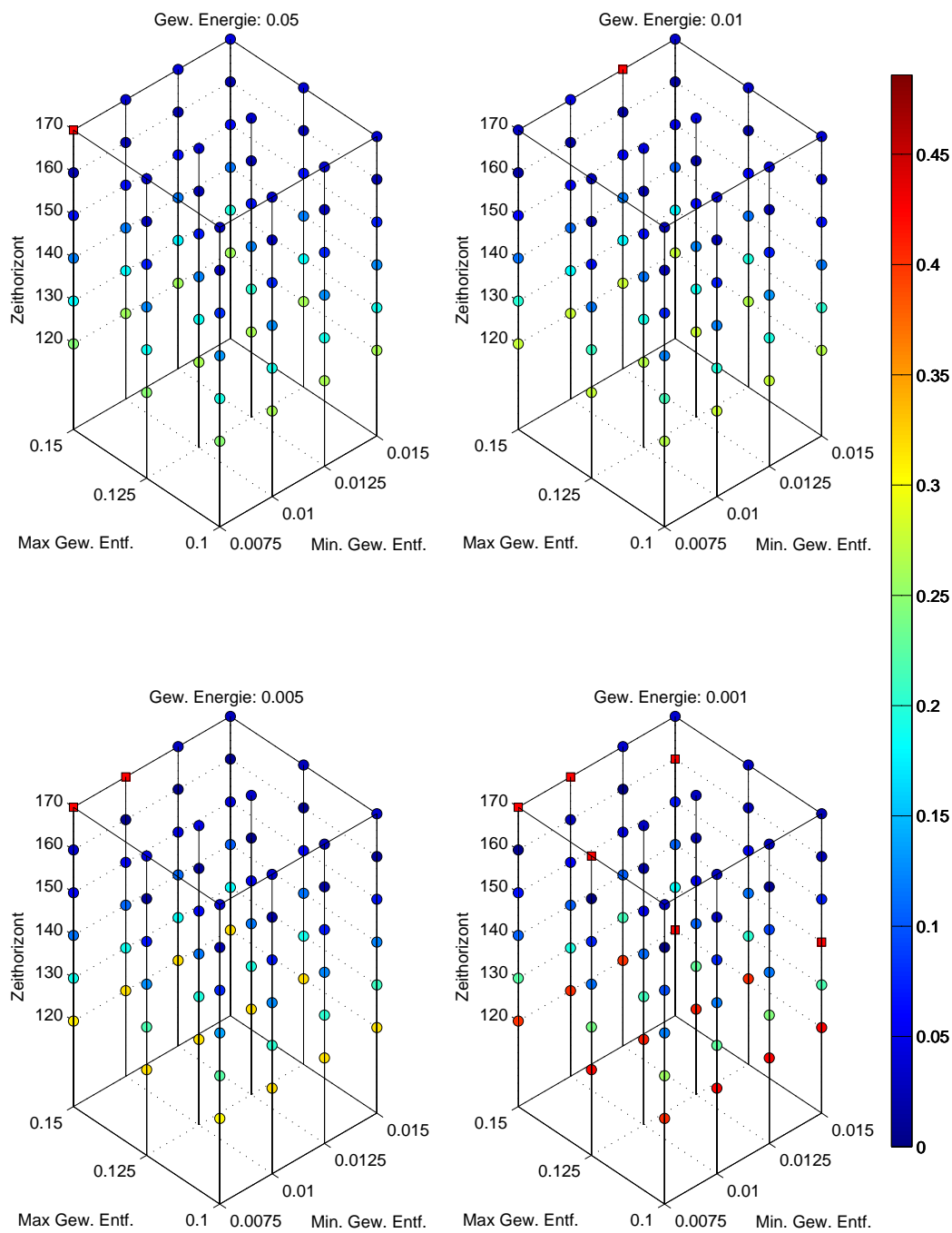


Abbildung A.4: Variation der Gewichtungparameter der Energie  $w_e$  und der Minimal- und Maximalwerte der Entfernung  $w_{entf, Min}$  und  $w_{entf, Max}$  bei unterschiedlichen Zeithorizonten (Gewichtung der Höhe: 0,97) mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Endkosten.

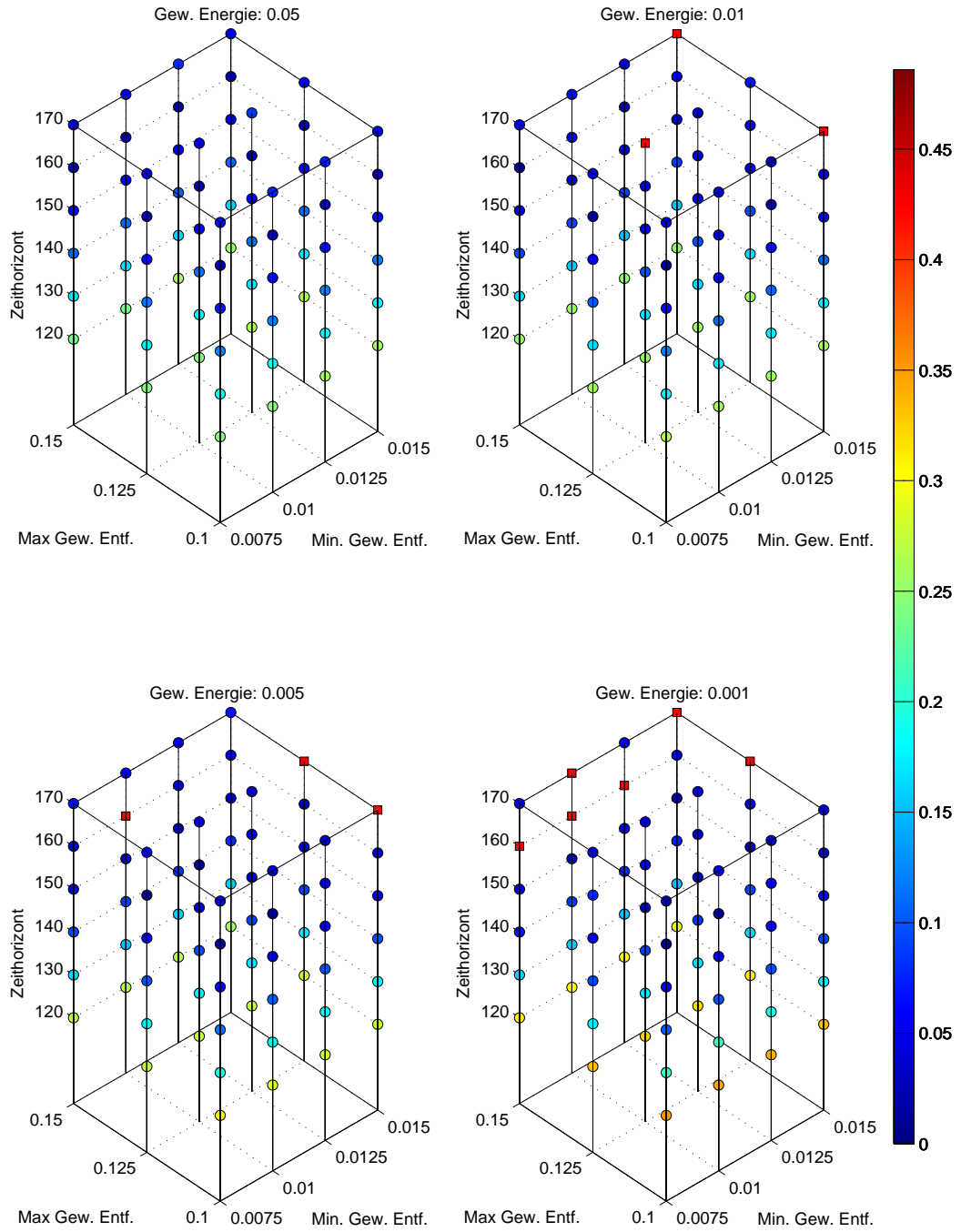


Abbildung A.5: Variation der Gewichtungparameter der Energie  $w_e$  und der Minimal- und Maximalwerte der Entfernung  $w_{entf, Min}$  und  $w_{entf, Max}$  bei unterschiedlichen Zeithorizonten (Gewichtung der Höhe: 0,98) mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Endkosten.



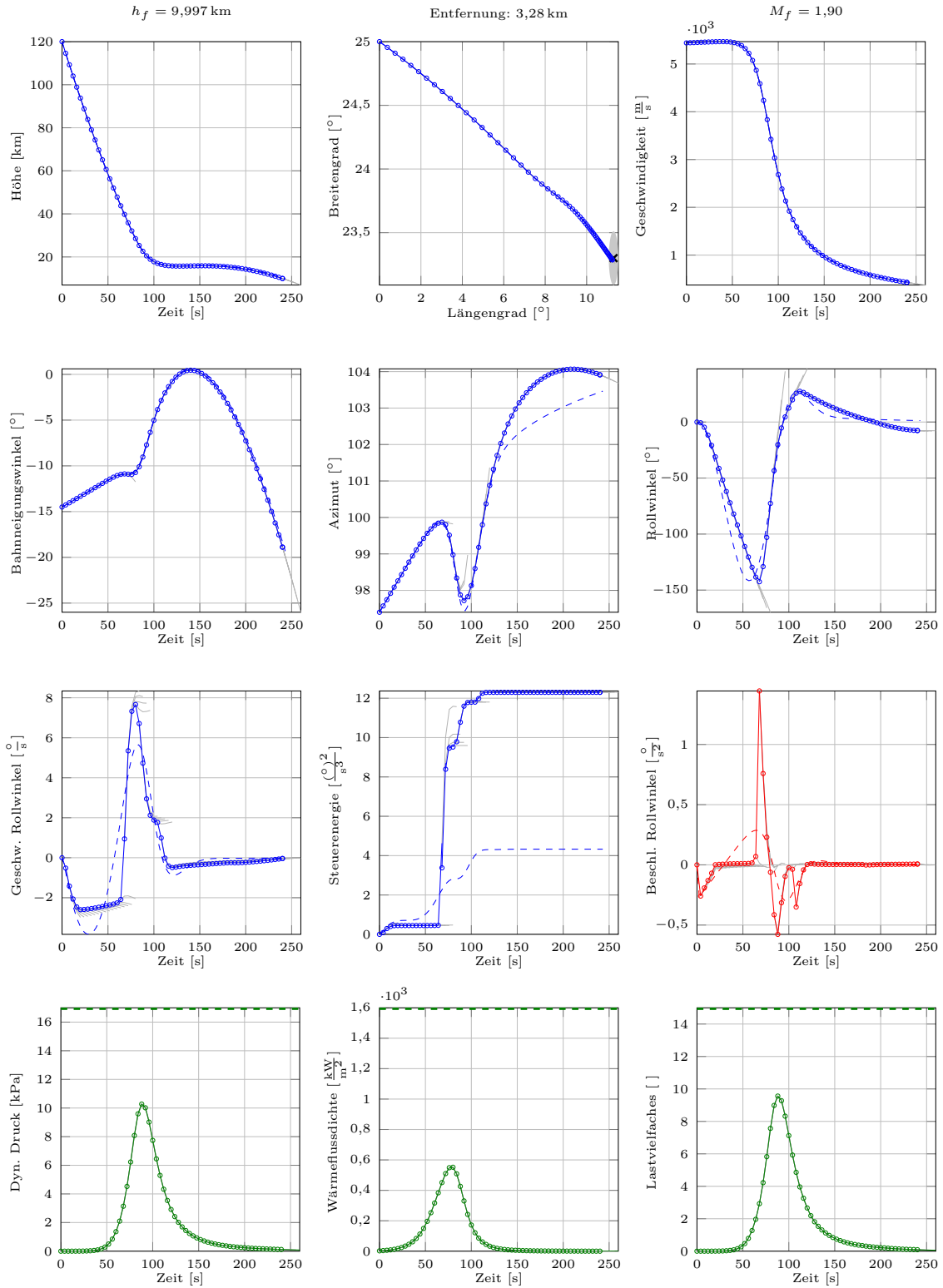


Abbildung A.6: Lösung des MPC-Verfahrens bei Verwendung der Zeit als Referenz und konstanter Gewichtung mit einem Zeithorizont von 20s und  $t_d = \Delta t = 4s$ . MPC-It.: 61, Rechenzeit: 92s. Pro MPC-Schritt: Diskrete Punkte: 6, Opt.var.: 61, Nebenbed.: 165,  $\phi$  WORHP-It.: 3,2.

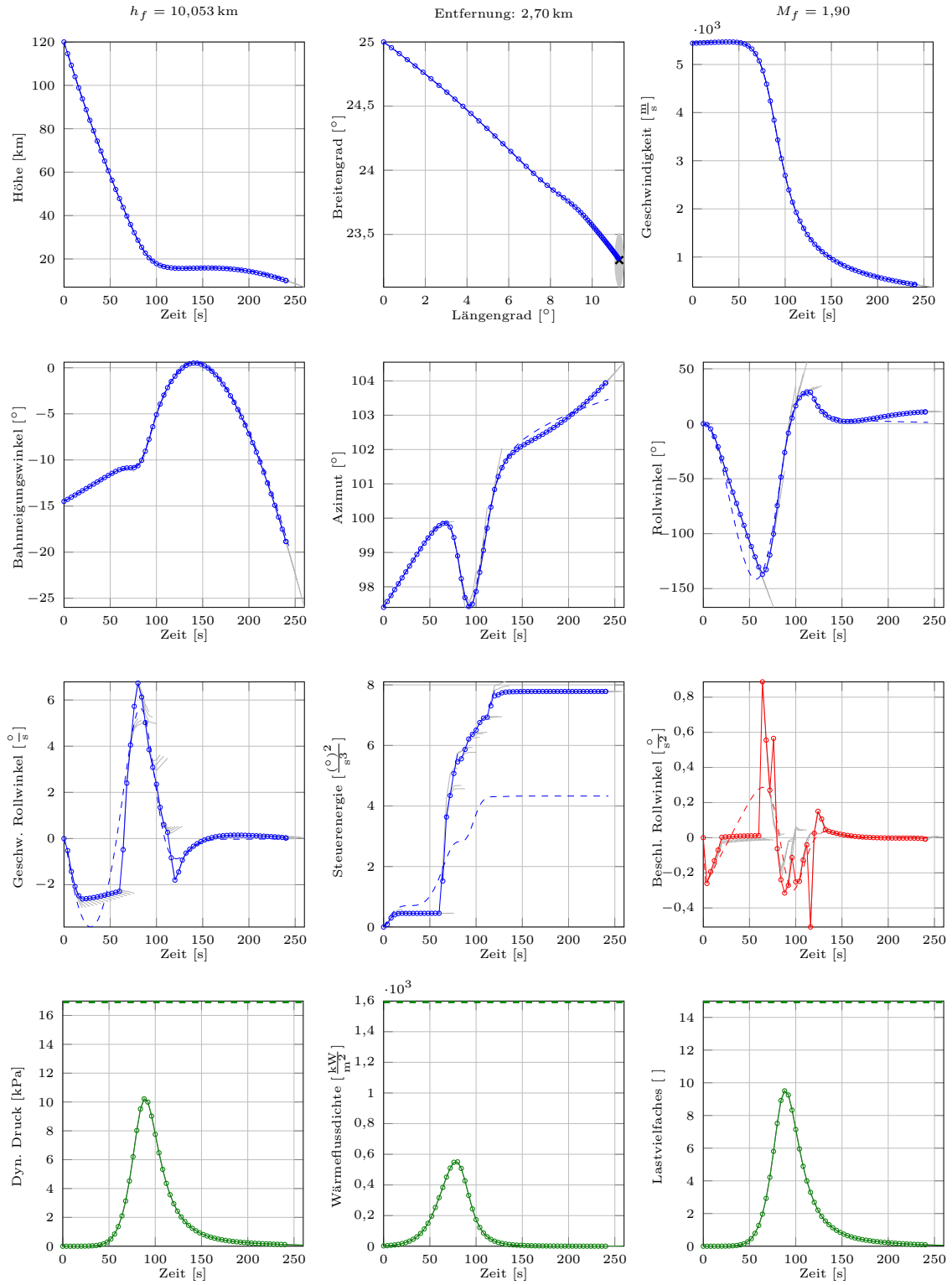


Abbildung A.7: Lösung des MPC-Verfahrens bei Verwendung der Geschwindigkeit als Referenz und konstanter Gewichtung mit einem Zeithorizont von 20s und  $t_d = \Delta t = 4s$ . MPC-It.: 61, Rechenzeit: 94s. Pro MPC-Schritt: Diskrete Punkte: 6, Opt.var.: 61, Nebenbed.: 165,  $\emptyset$  WORHP-It.: 3,7.

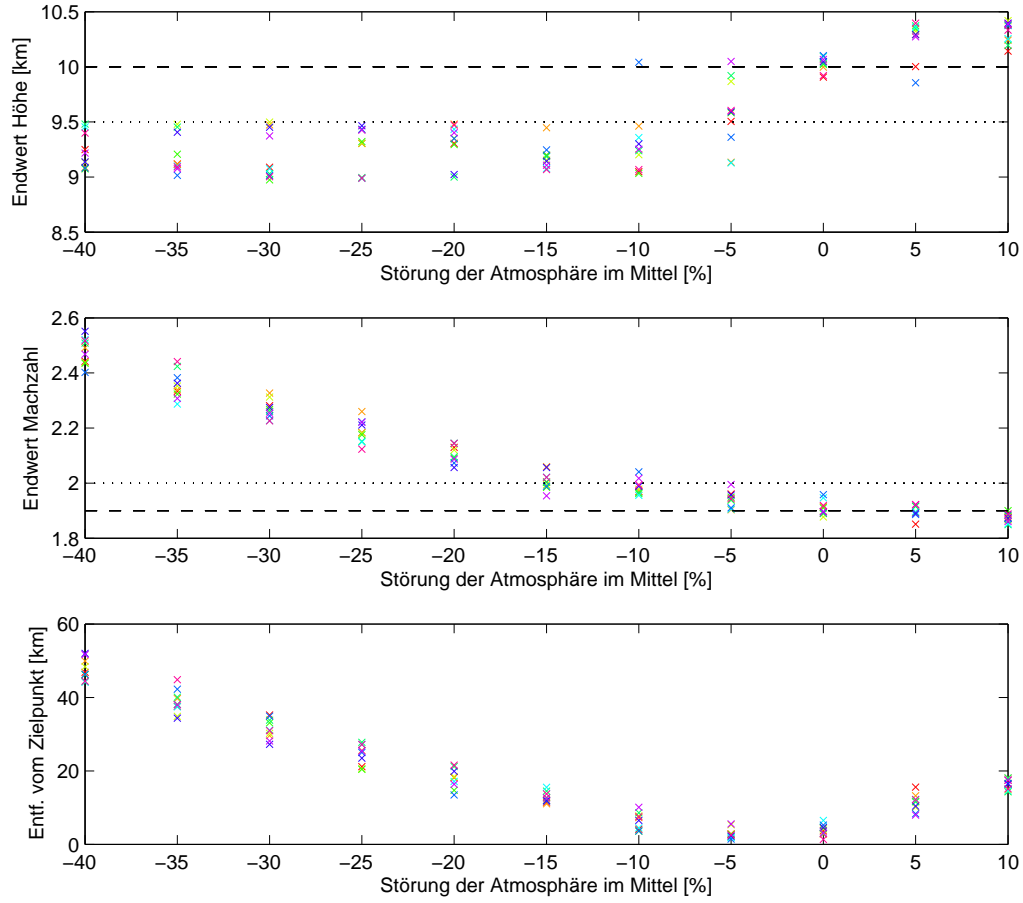


Abbildung A.8: Endzustände bei verschiedenen mittleren Abweichungen der Atmosphäre mit einer Standardabweichung von 4% mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Referenztrajektorie mit einem Zeithorizont von 20 s und  $t_d = \Delta t = 4$  s.

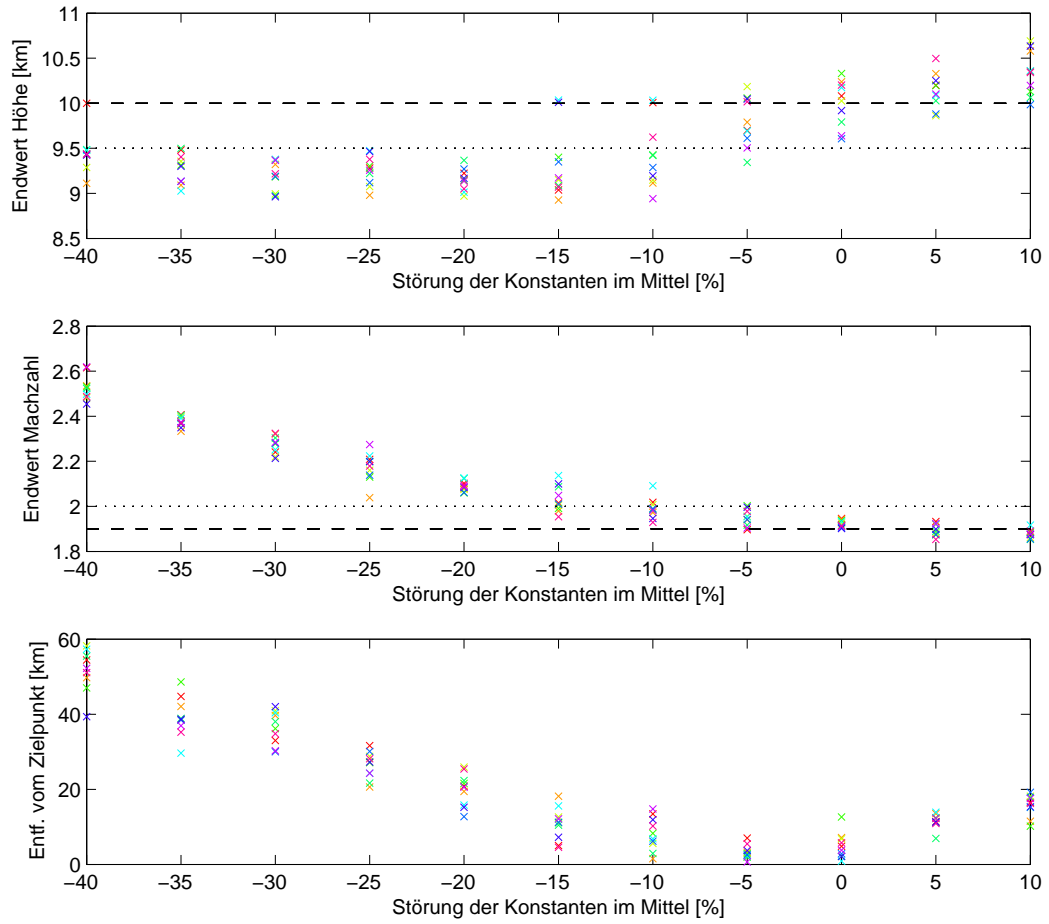


Abbildung A.9: Endzustände bei verschiedenen mittleren Abweichungen der Konstanten  $C_D$  und  $C_L$  mit einer Standardabweichung von 4% mit dem MPC-Verfahren bei Verwendung der Referenztrajektorie mit einem Zeithorizont von 20 s und  $t_d = \Delta t = 4$  s.

Pkte	Skal.	Zeit	Start.	Diskr.	Gew.	Abl.	Iter	Zeit	Zielfunktional	Beschr.	KKT	Erg.	Bild
100	l 10	242	l	h	0.001	bfgs	82	54	-5.298676E-02	-9	-7	0	0
200							92	911	-1.36868414	+1	+6	4	3
30							866	74	-5.295215E-02	-9	-7	0	0
						fidi	64	33	-5.295211E-02	-7	-8	0	0
	l 100					bfgs	201	40	-5.295211E-01	-8	-8	0	1
100							163	89	-5.298663E-01	-9	-7	0	0
						fidi	62	80	-5.298664E-01	-9	-7	0	0
	l 1					bfgs	666	219	-5.298219E-03	-9	-6	1	1
30							32	12	-5.295250E-03	-9	-7	0	0
						fidi	43	37	-5.295250E-03	-9	-3	1	0
	a 100					bfgs	198	40	-5.295481E-01	-8	-7	0	0
						fidi	78	33	-5.295210E-01	-8	-8	0	0
100						bfgs	116	73	-5.298663E-01	-10	-7	0	0
						fidi	74	86	-5.298664E-01	-9	-3	1	0
	a 10					bfgs	264	103	-6.227181E-02	0	+6	4	3
30							77	30	-5.295484E-02	-10	-7	0	0
	a 1						375	56	-5.295511E-03	-9	-7	0	0
100							46	40	-5.298766E-03	-10	-8	0	0
		250					79	54	-1.131125E-10	-2	-1	4	4
30							188	84	-5.295241E-03	-9	-7	0	0
	a 10						92	40	-5.295473E-02	-10	-6	1	0
100							167	61	-1.070779E-02	-7	+7	2	2
	a 100						178	467	-5.298622E-01	-10	-7	0	1
30							240	46	-5.295211E-01	-9	-7	0	0
	l 100						244	81	-5.295211E-01	-9	-7	0	0
100							267	910	-5.298663E-01	-9	-8	0	0
	l 10						206	123	-2.842761E-02	-7	+6	2	2
30							119	90	-5.295485E-02	-9	-8	0	0
	l 1						159	67	-5.295521E-03	-9	-7	0	0
100							55	98	-5.298798E-03	-8	-7	0	0
		230					185	338	-7.456758E-01	0	+3	4	4
30							57	31	-8.617587E-02	0	+7	4	3
	l 10						114	43	-5.295215E-02	-9	-8	0	0
100							59	53	-1.047700	0	+4	4	3
	l 100						289	934	-5.298664E-01	-9	-7	0	0
30							104	31	-5.295479E-01	-7	-7	0	0
	a 100						253	42	-5.295211E-01	-8	-7	0	0
100							200	86	-5.298664E-01	-7	-7	0	0
	a 10						442	241	-5.298673E-02	-10	-7	0	0
30							205	41	-5.295213E-02	-8	-7	1	0
	a 1						1079	88	-5.295241E-03	-10	-9	0	0
100							285	100	-5.298713E-03	-9	-7	0	1
30	l 1	242	c				6	12	-5.461104E-14	-2	+3	4	3
100							8	34	-3.472460E-13	-2	+2	4	3
	l 10						5	35	-9.113705E-14	-1	+3	4	3
30	l 100						5	12	-2.874331E-14	0	+2	4	3
	a 100						7	15	-2.707759E-19	0	-2	4	4
100							7	34	-4.120258E-13	0	+1	4	3
	a 10						5	34	-9.102880E-14	-1	+3	4	3
	a 1						6	35	-1.820103E-13	-2	+3	4	3
			l	t			66	33	-5.314812E-03	-10	-7	0	0
30							133	30	-5.467449E-03	-10	-7	0	0
	a 10						91	29	-6.880220E-01	+1	+6	4	3
100							72	33	-5.314715E-02	-8	-3	1	0

Pkte	Skal.	Zeit	Start.	Diskr.	Gew.	Abl.	Iter	Zeit	Zielfunktional	Beschr.	KKT	Erg.	Bild
100	a 100	242	l	t	0.001	bfgs	200	45	-2.826035E-01	-8	+6	4	3
30							533	95	-5.467148E-01	-10	-6	1	1
	l 100						757	51	-5.466959E-01	-8	-7	0	1
100							490	87	-5.313968E-01	-7	-7	0	1
	l 10						112	47	-5.314723E-02	-9	-7	0	0
30							67	16	-5.467429E-02	-9	-7	1	0
	l 1						103	27	-5.467461E-03	-9	-7	0	0
						fidi	87	29	-5.467466E-03	-7	-7	0	0
100						bfgs	57	32	-5.314842E-03	-9	-7	0	0
		250					62	34	-5.314842E-03	-9	-7	0	0
30							469	46	-5.467461E-03	-9	-7	1	0
	l 10						1081	66	-5.467429E-02	-9	-7	0	0
100							106	73	-5.314723E-02	-9	-7	0	0
	l 100						132	43	-5.987912E-01	+1	+8	4	3
30							311	37	-5.466520E-01	-9	-6	1	1
	a 100						663	57	-5.466787E-01	-10	-6	1	1
100							839	622	-5.314069E-01	-9	-7	0	1
	a 10						72	63	-5.314720E-02	-9	-8	0	0
30							150	41	-5.467429E-02	-9	-7	0	0
	a 1						372	37	-5.467455E-03	-9	-7	1	0
100							1569	1799	-3.894644E-03	-9	-4	3	2
		230					1523	899	-2.506355E-03	-3	-13	1	2
30							59	17	-5.467451E-03	-10	-7	0	0
	a 10						80	17	-5.467429E-02	-9	-7	0	0
100							54	41	-7.197442E-06	-1	-1	4	4
	a 100						1014	559	-5.313768E-01	-9	-7	0	2
30							632	63	-5.467216E-01	-10	-7	0	1
	l 100						573	57	-5.465249E-01	-9	-5	1	2
					0.01		151	29	-5.415229E-01	-9	-7	0	0
100					0.001		503	205	-5.313941E-01	-9	-7	0	2
					0.01		410	89	-5.264219E-01	-8	-7	0	0
	l 10				0.001		549	91	-5.314724E-02	-8	-7	0	0
30							82	21	-5.467429E-02	-9	-7	1	0
	l 1						29	6	-5.467461E-03	-9	-6	1	0
100							62	32	-5.314836E-03	-9	-6	1	0
		242	c				8	29	-3.407439E-13	-2	+2	4	3
30							6	8	-5.461099E-14	-2	+4	4	3
	a 100						5	8	-2.848133E-14	+1	+2	4	3
	a 1						5	8	-2.743439E-14	-1	+4	4	3
	l 100		l	h	0.01		195	39	-5.244855E-01	-9	-7	0	0
						fidi	47	29	-5.244855E-01	-8	-8	0	0
100						bfgs	134	67	-5.248386E-01	-9	-7	0	1
	l 10						77	58	-5.248402E-02	-9	-7	0	0
						fidi	41	51	-5.248408E-02	-7	-8	0	0
30						bfgs	22	20	-1.512455	+1	+7	4	3
	l 1						33	13	-5.244893E-03	-9	-8	0	0
						fidi	43	30	-5.244893E-03	-9	-2	1	0
100						bfgs	462	1795	-1.740544E-03	-9	-4	3	2
	a 1						58	47	-5.248487E-03	-10	-6	1	0
30							382	52	-5.245159E-03	-10	-7	1	0
	a 10						192	41	-5.244857E-02	-10	-7	0	0
						fidi	115	41	-5.244794E-02	-8	-3	1	0
100						bfgs	36	47	-1.007091E-01	0	+6	4	3
	a 100						111	62	-5.248387E-01	-10	-7	0	0

Pkte	Skal.	Zeit	Start.	Diskr.	Gew.	Abl.	Iter	Zeit	Zielfunktional	Beschr.	KKT	Erg.	Bild
100	a 100	242	l	h	0.01	fidi	72	80	-5.248390E-01	-8	-9	0	0
30						bfgs	235	42	-5.244855E-01	-8	-7	0	0
						fidi	33	29	-5.245130E-01	-8	-8	0	0
		250				bfgs	70	28	-5.244855E-01	-8	-7	0	0
100							164	70	-2.401248E-01	-7	+6	1	2
	a 10						158	69	-1.910548E-03	-11	+6	4	2
30							80	35	-5.244857E-02	-9	-7	0	0
	a 1						2858	507	-5.245159E-03	-10	-7	0	0
100							873	1798	-1.247797E-04	-3	+6	5	3
	l 1	230					195	101	-5.248459E-03	-9	-3	1	0
30							169	42	-5.244892E-03	-9	-7	0	0
	l 10						134	35	-5.245133E-02	-9	-7	0	0
100							230	577	-7.139362E-02	0	+8	4	3
	l 100						197	86	-5.248370E-01	-9	-7	0	0
30							76	29	-5.244855E-01	-9	-7	0	0
		242		t			78	16	-5.415230E-01	-9	-7	0	0
						fidi	97	27	-5.415230E-01	-7	-9	0	0
100						bfgs	375	77	-5.264219E-01	-9	-8	0	0
						fidi	1114	1798	-4.546951E-01	-7	-4	3	1
	l 10					bfgs	77	41	-5.264231E-02	-9	-8	0	1
30							65	18	-5.415233E-02	-9	-7	0	0
	l 1						63	15	-5.415265E-03	-9	-8	0	0
100							224	46	-5.264313E-03	-9	-6	1	0
	a 1						61	48	-5.264292E-03	-9	-7	0	0
30							162	39	-5.415258E-03	-10	-7	1	0
	a 10						130	33	-5.415224E-02	-10	-7	0	0
100							30	26	-5.264228E-02	-10	-7	0	0
	a 100						431	89	-5.264219E-01	-9	-8	0	0
30							126	29	-5.415230E-01	-8	-7	0	0
		250					118	25	-5.415230E-01	-10	-7	0	0
100							284	74	-5.264101E-01	-10	-7	0	0
	a 10						91	39	-5.264226E-02	-10	-6	1	0
30							66	16	-5.415229E-02	-9	-7	0	0
	a 1						62	12	-5.415163E-03	-10	-5	1	0
100							1121	157	-5.264310E-03	-10	-6	1	0
	l 1	230					35	25	-5.264349E-03	-8	-7	0	0
30							28	7	-5.415265E-03	-9	-7	0	0
	l 10						103	24	-5.415233E-02	-9	-7	0	0
100							310	121	-5.264231E-02	-9	-7	0	0
	l 100						462	101	-5.264217E-01	-9	-3	1	0
30							151	30	-5.415229E-01	-9	-7	0	0
200		242					398	657	-5.249550E-01	-9	-7	0	1
	l 10						90	64	-9.897337	+1	+4	4	4
	l 1						285	108	-5.253271E-03	-9	-7	1	0
	a 1						28	34	-5.253095E-03	-10	-7	1	0
	a 10						497	287	-5.253026E-02	-10	-7	0	0
	a 100						615	1791	-5.247214E-01	-10	-4	3	1
				h			94	770	-8.972920E+01	+2	+6	4	3
	a 10						224	296	-5.248471E-02	-10	-6	1	1
	a 1						251	762	-1.473913E-03	0	+8	4	3
	l 1						68	105	-3.251156E-02	-1	+3	4	3
	l 10						242	1792	-5.248501E-02	-9	-4	3	1
	l 100						238	1794	-4.244680E-01	-9	-5	3	2
	l 1				0.001		63	547	6.702157E+06	+10	+20	4	3

Pkte	Skal.	Zeit	Start.	Diskr.	Gew.	Abl.	Iter	Zeit	Zielfunktional	Beschr.	KKT	Erg.	Bild
200	l 100	242	l	h	0.001	bfgs	43	90	-7.032197	+1	+7	4	3
	a 100						266	1756	-5.297870E-01	-8	-7	0	1
	a 10						145	853	-5.299210E-02	-8	-7	0	0
	a 1						379	1797	-2.386387E-03	-3	+9	5	3
100	a 10						264	103	-6.227181E-02	0	+6	4	3
						fidi	50	116	-5.298673E-02	-7	-10	0	0
						b21	271	254	-6.058817E-02	0	+5	4	3
						b210	426	1800	-4.645079E-02	-9	-4	3	2
30			t			bfgs	91	29	-6.880220E-01	+1	+6	4	3
						fidi	61	24	-5.467425E-02	-7	-8	0	0
						b0	749	119	-5.454655E-02	-10	-6	1	2
						b21	91	32	-6.880220E-01	-1	+1	4	3
						b210	271	59	-1.003654E+01	+1	+7	4	3
						b31	2292	131	-5.464482E-02	-10	-5	1	1
						b310	1060	222	-5.401172E-02	-7	-4	3	2
						bfgs00	165	32	-3.425462E-01	+1	+8	4	3
						bfgs01	619	99	-5.465368E-02	-10	-6	1	2
						bfgs10	268	32	-5.467350E-02	-10	-6	1	1
100	a 100					fidi	54	38	-5.314212E-01	-7	-7	0	0
30	l 10			h	0.01		57	45	-5.244857E-02	-8	-9	0	0
100	a 10						58	172	-5.248398E-02	-10	-7	0	0
	l 100	250		t	0.001		594	1800	-5.314648E-01	-7	-4	3	0
	a 1			h			51	113	-5.298763E-03	-8	-9	0	0
					0.01		50	113	-5.248489E-03	-10	-7	1	0
	l 1	230			0.001		49	54	-5.298793E-03	-8	-7	0	0
30							40	29	-5.295250E-03	-9	-9	0	0
100	l 10						45	54	-5.298676E-02	-7	-9	0	0
					0.01		42	43	-5.248407E-02	-7	-8	0	0
200	a 1			t			43	64	-5.253080E-03	-7	-8	0	0
100							1280	1800	-5.265044E-03	-6	-4	3	0
200	a 10						44	111	-5.253047E-02	-7	-8	0	0
	a 100						81	96	-5.252588E-01	-7	-7	0	0
	l 100						88	91	-5.252741E-01	-7	-7	0	0
	l 10						45	56	-5.253042E-02	-7	-8	0	0
	l 1						40	62	-5.253278E-03	-7	-8	0	0
		250					38	61	-5.253272E-03	-8	-9	0	0
	l 10						43	110	-5.253043E-02	-7	-8	0	0
	l 100						62	62	-5.252414E-01	-7	-7	0	0
	a 100						100	113	-5.253008E-01	-8	-3	1	0
	a 10						45	58	-5.253031E-02	-7	-8	0	0
	a 1						75	62	-5.253210E-03	-8	-8	0	0
				h			50	398	-5.249137E-03	-10	-7	1	0
	a 10						75	203	-5.248955E-02	-8	-7	0	0
	a 100						397	1130	-5.248939E-01	-8	-7	0	0
	l 100						132	1786	-5.248965E-01	-5	-4	3	0
	l 10						666	1798	-5.248989E-02	-6	-4	3	0
	l 1						686	1800	-5.249234E-03	-7	-4	3	0
		230					38	770	-5.249065E-03	-9	-7	0	0
	l 10						150	1794	-5.248989E-02	-6	-4	3	0
	l 100						584	1627	-5.248939E-01	-9	-7	0	0
	a 100						134	1783	-5.248952E-01	-5	-4	3	0
	a 10						139	1787	-5.248987E-02	-5	-4	3	0
	a 1						145	1790	-5.249164E-03	-6	-4	3	0

Tabelle A.1: Zu Beginn der Untersuchungen durchgeführte Testfälle, um die Art der Skalierung, der Diskretisierung und der Berechnung der Ableitungen festzulegen.



# Anhang B

## Parameterdateien von WORHP

An dieser Stelle werden auszugsweise die Einstellungen von *WORHP* und *Trans-WORHP* aufgelistet, die zur Berechnung der numerischen Ergebnisse verwendet wurden.

Auszug der xml-Datei für *WORHP* für die Lösung des gesamten optimalen Steuerprozesses:

```
<?xml version="1.0" encoding="UTF-8"?>
<WorhpData revision="1780">
  <Params>
    <BOOL name="FidifHM"           >True</BOOL>
    <BOOL name="UserDF"            >False</BOOL>
    <BOOL name="UserDG"            >False</BOOL>
    <BOOL name="UserHM"            >False</BOOL>
    <INT name="BFGSmaxblockSize"    >300</INT>
    <INT name="BFGSmethod"          >0</INT>
    <INT name="BFGSminblockSize"    >300</INT>
    <INT name="BFGSrestart"         >50</INT>
    <INT name="MaxIter"             >500</INT>
    <DOUBLE name="AcceptTolFeas"    >1.0000000000000000e-03</DOUBLE>
    <DOUBLE name="AcceptTolOpti"    >1.0000000000000000e-03</DOUBLE>
    <DOUBLE name="Timeout"          >3.6000000000000000e+03</DOUBLE>
    <DOUBLE name="TolFeas"          >1.0000000000000000e-06</DOUBLE>
    <DOUBLE name="TolOpti"          >1.0000000000000000e-06</DOUBLE>
  </Params>
</WorhpData>
```

Auszug der xml-Datei für *WORHP* für die Lösung bei Verwendung des MPC-Verfahrens:

```
<?xml version="1.0" encoding="UTF-8"?>
<WorhpData revision="1780">
```

```
<Params>
  <BOOL name="FidifHM"           >True</BOOL>
  <BOOL name="UserDF"            >False</BOOL>
  <BOOL name="UserDG"            >False</BOOL>
  <BOOL name="UserHM"            >False</BOOL>
  <INT name="BFGSmaxblockSize"    >300</INT>
  <INT name="BFGSmethod"          >0</INT>
  <INT name="BFGSminblockSize"    >300</INT>
  <INT name="BFGSrestart"         >50</INT>
  <INT name="MaxIter"             >50</INT>
  <DOUBLE name="AcceptTolFeas"    >1.0000000000000000e-01</DOUBLE>
  <DOUBLE name="AcceptTolOpti"    >1.0000000000000000e-01</DOUBLE>
  <DOUBLE name="Timeout"          >3.0000000000000000e+02</DOUBLE>
  <DOUBLE name="TolFeas"          >1.0000000000000000e-03</DOUBLE>
  <DOUBLE name="TolOpti"          >1.0000000000000000e-03</DOUBLE>
</Params>
</WorhpData>
```

Auszug der xml-Datei für *TransWORHP*:

```
<?xml encoding="UTF-8" standalone="yes" version="1.0"?>
<!DOCTYPE TRANSWORHP SYSTEM "krobot.dtd">
<TRANSWORHP>
  <WORHP param="worhp.xml">
    <USERDF>-1</USERDF>
    <USERDG>-1</USERDG>
    <USERHM>-1</USERHM>
  </WORHP>
  <DISCRETIZATION>1</DISCRETIZATION>
  <!--DISCRETIZATION>Trapez</DISCRETIZATION-->
  <DISCRETIZATION>HermiteSimpson</DISCRETIZATION>
  <FINITEDIFF>1e-6</FINITEDIFF>
  <BUTCHER>3</BUTCHER>
  <HESSIAN>
    <STRUCTURE>3</STRUCTURE>
    <VALUES>0</VALUES>
  </HESSIAN>
  <MAGIC_HESSIAN>
    <STRUCTURE>5</STRUCTURE>
    <VALUES>4</VALUES>
  </MAGIC_HESSIAN>
</TRANSWORHP>
```

# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und ausschließlich die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Bremen, den 19. Juni 2014

---

Carina Schomakers